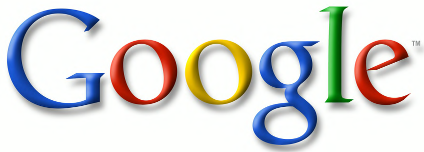
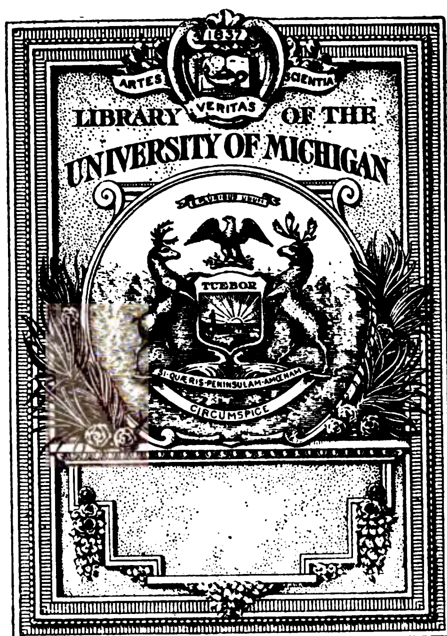



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Arithmetik und Algebra

für

höhere Schulen und Lehrerseminare,

besonders

zum Selbstunterricht.

In engster Verknüpfung mit der Geometrie
zur
Versinnlichung der Zahlbegriffe, Theorien, Operationen, Lehrsätze
und Auflösung von Aufgaben

systematisch bearbeitet

von

Werner Jos. Schüller,
Seminarlehrer in Boppard am Rhein.

Mit zahlreichen Figuren im Text.



Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1891.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-13-1923

Herrn Dr. Siegmund Günther,

ord. Prof. an der Technischen Hochschule in München,

dem hochverdienten Schriftsteller auf mathematischem Gebiet

und

dem verdienstvollen Förderer der mathematischen Wissenschaften,

in ausgezeichneter Verehrung

ganz ergebenst

gewidmet

vom Verfasser.

Vorwort.

Der bekannte Methodiker und Mathematiker **Karl Koppe** sagt in der Vorrede zu seiner „**Arithmetik und Algebra für den Schul- und Selbstunterricht**“ u. a. folgendes: „**Während** in der **Geometrie** der **Inhalt** der **Lehrsätze** vermöge seiner **Anschaulichkeit** von den Schülern mit **großer Leichtigkeit** erfaßt wird, und so als alleinige Aufgabe das richtige Verständnis des Beweises übrig bleibt, bietet in der **Arithmetik** der **abstrakte Inhalt** der **Sätze** und die **Form** der **Beweisführung** in **allgemeinen Zeichen** dem Anfänger eine **zweifache** Schwierigkeit dar.“

Dieser Äußerung **Koppes** dürfte wohl jeder Lehrer der allgemeinen Arithmetik unbedingt zustimmen.

Um die Erlernung der Zahlenlehre für die Schüler zu erleichtern, ist von bedeutsamer Seite der Vorschlag gemacht worden, die weit **anschaulichere Geometrie** der abstrakten Arithmetik im Schulunterricht **voraufgehen** zu lassen.*) Andere Autoren von gutem Klange wollen wegen der Schwierigkeiten, welche die Zahlenlehre infolge ihres abstrakten Charakters dem Lernenden darbietet, die **theoretischen Belehrungen** auf ein „**möglichst geringes Maß beschränken**“. So hoch auch der formale und praktische Wert der **Anwendungen** der arithmetischen Lehren, also das Rechnen, zu schätzen ist, so erscheint doch andererseits eine zu starke Beschränkung der **Theorie** der Arithmetik durchaus bedenklich. Namentlich hält

---

*) „Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht“ von J. C. V. **Hoffmann**, XI. Jahrgang, Seite 343.

der Verfasser an der Forderung fest, daß der Schüler eine klare Einsicht in den systematischen Aufbau der Zahlenlehre von der natürlichen Zahl an bis zur allgemeinen komplexen Zahlform gewinnen muß. Denn 1) bietet gerade die theoretische Seite der allgemeinen Arithmetik einen geeigneten Stoff, ja, eine wahre Fundgrube zur formalen Geistesbildung;*) 2) ein mit tüchtigen theoretischen Kenntnissen ausgerüsteter Schüler wird sich auf dem Boden der Praxis weit sicherer und mit größerem Erfolg bewegen als ein solcher, welcher nur über ein geringes theoretisches Können verfügt.**) Der Unterricht in der Buchstabenrechnung hat also auch die theoretische Seite dieser Wissenschaft wohl zu pflegen.

Soll aber eine gründliche, erfolgreiche Durcharbeitung des theoretischen Stoffes bei durchaus billigen Anforderungen an die Fassungskraft des Lernenden gelingen, so muß die methodische Darbietung des Stoffes das bisher noch vielfach befolgte wissenschaftliche Verfahren der Deduktion in be-

*) „Was den Wert der induktiven Methode betrifft, so gebe ich denselben für alle lateinlosen Schulen und für Schüler mit geringer allgemeiner Begabung und langsamem Denken unbedingt und in vollem Umfange zu. Doch ist auch für humanistische Anstalten die Methode, von den bekannten Thatsachen des Zahlenrechnens auszugehen, und die Beziehungen der Rechenregeln zur Geometrie zur Veranschaulichung dieser Regeln zu benutzen, ganz zweifellos zu empfehlen. Um so mehr, da die allgemeine Klage über den abstrakten Charakter der Buchstabenrechnung und die daraus für die Schule entstehende Schwierigkeit und Ungenießbarkeit dieses Unterrichtes vielfach dazu geführt hat, den theoretischen Teil desselben dem praktischen gegenüber zu vernachlässigen, womit man ein ganz wesentliches, der Schärfung des Verstandes dienendes Bildungsmittel über Bord wirft.“ Viktor Schlegel. — „Die Theorie ist fruchtlos ohne die Praxis, die Praxis ist geistlos ohne gründliche Theorie.“

**) „Vieljährige Erfahrung hat mich gelehrt, daß Schüler, die in der Arithmetik wohl unterrichtet waren, bei der Auflösung der Aufgaben durch Gleichungen sehr wenige Schwierigkeiten gefunden haben; das Gegenteil aber im entgegengesetzten Falle.“ (Jos. Beskiba, Prof. der Mathematik am Polytechnischen Institut in Wien, „Gleichungen“, Seite 263.)

schränkterem Umfange anwenden und in andere, geeignetere Bahnen einlenken.*)

Um nun das Ungenießbare der allgemeinen Arithmetik aus dem Unterricht fernzuhalten, vielmehr gerade diese abstrakte Wissenschaft dem Lernenden begehrenswert erscheinen zu lassen, ist in dieser Schrift dem allgemein anerkannten Grundsatz von der Anschaulichkeit des Unterrichts auf zweifache Weise Rechnung getragen worden, nämlich:

I) Durch Benutzung der sogenannten **induktiven Methode.** Die Erlernung der allgemeinen arithmetischen Wahrheiten geht stets vom Einzelnen, vom Beispiele aus. Die allgemeine Arithmetik ist durchgängig an die dem Lernenden bekannte besondere Arithmetik angeschlossen, letztere erscheint somit als Ausgangs- und Übergangsstufe zum allgemeinen und abstrakten Buchstabenrechnen. Das gesperrt vorgedruckte Wort „Beispiele“ soll die Aufmerksamkeit des Lernenden auf einen zu entwickelnden arithmetischen Begriff oder eine Wahrheit hinrichten. Letztere wird aus bestimmten Zahlenbeispielen auf induktivem Wege abgeleitet. An Stelle der bestimmten Zahlenwerte tritt schließlich die Darstellung des Lehrsatzes in der analytischen Zeichensprache, d. h. die allgemeine Formel. Die aus den vorhergehenden Beispielen gewonnene arithmetische Wahrheit ist stets in Form eines **Lehrsatzes** ausgesprochen. Meistens ist der Beweis in allgemeinen Zeichen der Vollständigkeit wegen hinzugefügt. In welchem Umfange die allgemeine (deduktive) Beweisführung im Unterricht benutzt werden kann, das muß dem Ermessen des Lehrers überlassen bleiben.

Dieser enge Anschluß der allgemeinen Arithmetik an das

---

*) „Es folgt daraus und ist durch vielfältige Erfahrung bestätigt, daß der Erfolg des mathematischen Unterrichts wesentlich von der Lehrmethode abhängt. Bei schlechter Methode hilft der größte Zeitaufwand nichts, während eine richtige Lehrweise in wenigen Wochenstunden viel zu leisten vermag.“ (Prof. Dr. Lothar Meyer in Tübingen, in der „Zeitschrift für mathematischen Unterricht“, XXII. Jahrgang, Seite 139.)

Rechnen mit bestimmten Zahlen gewährt unstreitig im Schulunterricht große Vorzüge vor der Deduktion, bei welcher dem Schüler die arithmetischen Begriffe, Theorien und Lehrsätze von vornherein in „größter Allgemeinheit und Strenge" dargeboten werden.

Daß durch das wissenschaftliche, deduktive Lehrverfahren der schon an sich abstrakte Stoff der allgemeinen Arithmetik dem Schüler geradezu „ungenießbar" gemacht wird und ihm vielleicht die Buchstaben gar als ein „inhaltleeres Zeichenspiel" erscheinen, darüber braucht man sich gewiß nicht zu verwundern. Bei konsequenter Befolgung der induktiven Methode dagegen vollzieht sich der Übergang von der besondern Arithmetik zur allgemeinen naturgemäß und leicht; letztere erscheint dem Lernenden nicht als eine neue, fremde, schwierige Wissenschaft, sondern als Verallgemeinerung und Erweiterung der im **Rechenunterricht** bereits erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten.

Während nun seit langer Zeit für die unterrichtlichen Belehrungen in Volksschulen und Lehrerseminaren die induktive Lehrweise als allein richtig anerkannt und eingeschlagen worden ist, haben sich in neuester Zeit namhafte Schulmänner des höheren Lehrfaches auch für die Benutzung dieser Methode an höheren Schulen (bezw. Mittelschulen im süddeutschen Sinne) ausgesprochen. Besonders J. C. V. Hoffmann ist in seiner Zeitschrift des öftern mannhaft für die Befolgung der induktiven Lehrweise an den genannten Anstalten eingetreten.*)

*) In dem Aufsatze: „Determinanten oder nicht? Eine Gefahr?" (XI. Jahrgang) fordert Hoffmann zu wiederholten Malen die Benutzung der Induktion. Seite 346: „Wir müssen schon hier bemerken, daß die angedeutete Methode (zur Einführung in die Determinantenlehre) ein ausgezeichnetes Beispiel liefert für den didaktischen Grundsatz: Vom Einfachen zum Zusammengesetzten oder vom Besondern zum Allgemeinen, und daß durch die entgegengesetzte Methode eben so glänzend illustriert wird der didaktische Fehler, welcher von denen begangen wird, die vom Allgemeinen zum Besondern herabsteigen." Seite 356: „Ist auch nur einer unter ihnen, der sich ganz von dem Vorwurfe frei wüßte, er habe mehr oder weniger gegen die für

Und mit Recht! Denn die von mancher Seite mißachtete, nichtsdestoweniger für Schule und Wissenschaft*) ganz unentbehrliche Induktion findet gerade in der Mathematik, speziell in der allgemeinen Arithmetik, sehr günstige Grundlagen. Bestimmte Zahlenspiele „können wir uns in beliebig großer Anzahl unmittelbar in der inneren Anschauung vergegenwärtigen", um die Allgemeingültigkeit der an einzelnen Beispielen erkannten Wahrheiten einzusehen. Ist ein arithmetischer Lehrsatz einmal auf induktivem Wege abgeleitet,

---

den Anfänger **immer** anzuwendende didaktische Regel: „Vom Einfachen zum Zusammengesetzten, vom Besonderen zum Allgemeinen" gefehlt? Und worin liegt denn das Unnatürliche dieser Lehrweise? Man erklärt zuvörderst einen völlig neuen Algorithmus, von dessen Zweck und Anwendung der Schüler noch keine Idee hat und für den sein Interesse nicht geweckt ist. Diese Anwendung wird von dem Schüler nicht — wie man wünschen muß — gesucht, sie wird ihm vielmehr aufgedrungen." Seite 357: „Es ist gewiß etwas Schönes und Herrliches um die „größte Strenge und Allgemeinheit", mit der ein Gauß und Cauchy in ihren Schriften oder vom Katheder herab den zu ihren Füßen sitzenden Jüngern der Wissenschaft ihre Theorien vortragen; wenn aber die „dii minorum gentium" der edlen Sippe der magistri matheseos, diesem Verfahren mehr nachäffend als nacheifernd, solche Methode in die Schulstube verpflanzen wollen, dann muß der böse Samen einen Boden finden, wo er als Unkraut aufgeht, und auf solcher Unmethode kann nur der Fluch des Rückschritts ruhen." Man sehe ferner XXII. Jahrg. Seite 93 und die Seite VI mitgeteilte Ansicht von Schlegel. Vergleiche auch Waitz, Allgemeine Pädagogik S. 410 und 411, ferner Drobisch, Logik, Seite 156 und 167.

*) Ein pädagogischer Schriftsteller äußert sich über den Wert der Induktion folgendermaßen: „Alle wissenschaftlichen Lehrsätze gehen aus der Zusammenfassung des Besondern zum Allgemeinen, also aus induktivem Denken hervor. Ein „reines" Denken, eine wissenschaftliche Spekulation ohne empirischen Inhalt, eine Erkenntnis ohne Erfahrung giebt es nicht. Erst wenn auf induktivem Wege allgemeine Urteile gewonnen sind, können aus denselben andere Erkenntnisse abgeleitet (deduziert) werden." Über die Bedeutung der Induktion für Schule und Wissenschaft vergleiche man ferner die „Psychologie" von Dr. Wilh. Esser, Prof. der Philosophie zu Münster, Seite 305 ff.; „Handbuch der Erziehung und des Unterrichts" von Kehrein-Keller, § 67; Dr. Schumann, „Lehrbuch der Pädagogik", Seite 143 und 154.

so dürfte die Schwierigkeit der Beweisführung in allgemeinen Zeichen wesentlich beseitigt sein.

II) Um dem abstrakten Stoffe der allgemeinen Arithmetik eine anschauliche, konkrete Unterlage zu schaffen, die arithmetischen Zahlzeichen in ein sinnfälliges Gewand zu kleiden, sind in vorliegendem Buche **zeichnerische Darstellungen**, besonders geometrische Konstruktionen, recht zahlreich benutzt worden. Überall da, wo es angeht, spielt die geometrische Versinnlichung bei der Entwickelung der Zahlbegriffe, Theorien, Lehrsätze und Operationsbegriffe die Hauptrolle, die bekanntesten und einfachsten Raumgebilde bilden den Ausgangs- und Mittelpunkt der theoretischen arithmetischen Belehrungen. Der didaktische Wert, welchen die Benutzung geometrischer Beziehungen in der Arithmetik und Algebra gewährt, ist so klar und einleuchtend, daß es eigentlich überflüssig ist, dies noch besonders hervorzuheben. Es scheint indes, daß dieses wichtigste Mittel, den abstrakten Inhalt der Arithmetik zu versinnlichen, noch gar nicht zur verdienten Geltung gelangt ist. Für die Benutzung geometrischer Darstellungen beim Unterricht in der Arithmetik hat sich besonders G. Hauck in der Hoffmann'schen Zeitschrift*) ausgesprochen. Dieser Mathematiker hält die geometrische Versinnlichung im arithmetischen Unterricht für so selbstverständlich, daß er seinem Erstaunen über das Verlangen nach Einführung dieses Gegenstandes in folgenden Worten Ausdruck giebt: „Ich für meine Person habe den Sinn jenes Verlangens nie recht begreifen können, weil ich von der Voraussetzung ausgehe, daß der mathematische Unterricht in der Schule in der richtigen einheitlichen, die einzelnen Disziplinen enge miteinander verknüpfenden Weise erteilt werde. Ich setze voraus, daß im Unterricht in der Arithmetik die Geometrie beständig herbeigezogen werde, — nicht etwa, um arithmetische Operationen mit ihrer Hilfe praktisch auszuführen, wohl aber, um

*) „Das graphische Rechnen, seine Entwickelung seit Culmann und sein Verhältnis zur Schule" von Prof. G. Hauck. (XII. Jahrg., Seite 351.)

sie zu veranschaulichen. Nicht bloß für die höhere Mathematik, sondern auch für die niedere Arithmetik bildet die geometrische Versinnlichung eines der pädagogisch wertvollsten und wirksamsten Erläuterungsmittel, insofern eben die Geometrie das einzige Gebiet ist, welches wirkliche Objekte darbietet, die durchweg den nämlichen Verknüpfungen unterworfen werden können wie die abstrakten Zahlen, also dasjenige Gebiet, welches für jede solche Verknüpfung ohne Ausnahme eine Veranschaulichung zu liefern imstande ist."*) Die Ausführungen Haucks waren die Veranlassung, daß der Verfasser dieser Schrift die von ihm seit Jahren im arithmetischen Unterricht befolgte Methode unter dem Thema: „Verknüpfung einfacher Raumgebilde mit dem Rechnen", zum Gegenstande eines Konferenzvortrages machte. Derselbe erschien später im Drucke und fand an autoritativer Stelle wohlwollende Beachtung. Die zahlreichen Anerkennungen und die mehrfach in Zuschriften geäußerten Wünsche, den Gegenstand ausführlich zu bearbeiten, reiften im Unterzeichneten den Entschluß, die Brochüre zu vorliegendem Lehrbuch zu erweitern.

*) Den glänzendsten Beweis für den großen Nutzen, der aus der Verbindung der beiden Zweige der Mathematik, Algebra und Geometrie, hervorgeht, liefert die Geschichte der Mathematik. Letztere lehrt, daß die wichtigsten Fortschritte in der Zahlenlehre stets da zu verzeichnen sind, wo man dieselbe mit der Geometrie verknüpfte. In einer Besprechung des Schriftchens: „Verknüpfung einfacher Raumgebilde mit dem Rechnen", sagt Günther: „Daß dieser Weg, die übliche Formelauflösung so zu sagen von Schritt zu Schritt zeichnend zu kontrollieren, ein pädagogisch empfehlenswerter ist, das mag schon aus dem Umstande erhellen, daß die alten Araber (Mohammed ben Musa) in ähnlicher Weise bei jeder Gleichung zweiten Grades verfuhren. Das historische Werden einer Sache bietet aber auch stets einen didaktischen Fingerzeig." Auf die Veranschaulichung der Arithmetik durch Raumgebilde legt Herbart viel Gewicht. Das ganze „ABC der Anschauung" ist aus dieser Erkenntnis erwachsen. In dieser Schrift heißt es: „Die Strenge der Beweise ist nicht für Knaben; — desto mehr ist für sie die mannigfaltige Versinnlichung von Zahlen, Brüchen, Rechnungen, zu denen die Dreiecke beständig veranlassen. Diese Gelegenheit, der Arithmetik mehr Deutlichkeit zu verschaffen, muß, soweit es nur möglich ist, benutzt werden."

In demselben ist der Versuch durchgeführt, der didaktisch durchaus berechtigten Forderung: Benutze geometrische Darstellungen möglichst ausgiebig im arithmetischen Unterricht, Rechnung zu tragen.

Der Verfasser hat sich bestrebt, nicht bloß die für die Schüler besonders schwierige Theorie der algebraischen, imaginären und komplexen Zahlen geometrisch zu versinnlichen, sondern auch das Rechnen mit denselben durch Benutzung der Geometrie anschaulich und leicht zu gestalten. Auch glaubt er, die Lehrer der Arithmetik und Algebra besonders auf die Auflösung eingekleideter Gleichungsaufgaben mit Hilfe geometrischer Versinnlichung (§§ 92, 94 und 112) als eine für die Schule sehr empfehlenswerte Methode aufmerksam machen zu sollen.

III) Eine weitere Eigentümlichkeit dieser Schrift besteht darin, daß das **Geschichtliche** eine ziemlich hervorragende Berücksichtigung erfahren hat. Bei diesen historischen Bemerkungen sind M. Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", Chasles', „Geschichte der Geometrie", die Schriften Günthers und Klügels „Mathematisches Wörterbuch" benutzt worden. Auf den Wert des Geschichtlichen beim mathematischen Unterricht näher einzugehen, halten wir nicht für nötig, zumal da Günther in der Zeitschrift „Gymnasium" sich über diesen Gegenstand ausgesprochen hat.*) Denjenigen Lehrern, welche in ihrem Unterricht geschichtliche Bemerkungen benutzen, wird es hoffentlich angenehm sein, hier für die Schule brauchbare Mitteilungen zusammengestellt zu finden.

---

*) In der Abhandlung: „Über den Bildungswert der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer" u. s. f. („Die Natur", Nr. 44 und 45) äußert sich Günther folgendermaßen: „Die geschichtliche Entwickelung zeigt uns besser, wie jede methodologische Überlegung, welche Pfade — mitunter auch Irrwege — der menschliche Geist seit Jahrhunderten bei der Erkundung der Wahrheit gegangen ist, und der höchste Wunsch des Lehrers müßte es bei vielen Theorien sein, das jugendliche Erkenntnisvermögen in nuce dieselben Entwickelungsprozesse durchmachen zu lassen, welche die Menschheit als solche in langen Zeiträumen durchgemacht hat."

Bei der Bearbeitung dieser Schrift hatte der Verfasser in erster Linie das Lehrerseminar und diejenigen Schüler desselben im Auge, welche nach der zweiten Prüfung auf autodidaktischem Wege ihre mathematischen Kenntnisse erweitern und vertiefen wollen. Aus diesem Grunde dürfte die Breite und große Ausführlichkeit der Darstellung nicht bloß entschuldbar, sondern geradezu gerechtfertigt erscheinen. Darum ist u. a. die Proportionslehre benutzt worden, um die im Rechenunterricht behandelten bürgerlichen Rechnungsarten nochmals zu betrachten, die betreffenden Gesetze und Rechenregeln tiefer zu erfassen und ihre Richtigkeit allgemein zu beweisen.

Die Lehre von den imaginären und komplexen Zahlen gehört in dem gebotenen Umfange durchaus nicht ins Lehrerseminar, vielmehr ist es ausreichend, wenn an die Auflösung der quadratischen Gleichungen das Wesentliche über die Begriffe dieser neuen Zahlarten auf Grundlage ihrer geometrischen Darstellungen angeschlossen wird. Ein tieferes Eindringen in den im siebenten Abschnitt behandelten Gegenstand muß dem späteren Privatfleiße der Zöglinge überlassen bleiben.

Von der Bearbeitung der Logarithmen glaubte der Verfasser absehen zu sollen, weil seines Wissens dieselben in den Lehrplan der meisten Lehrerseminare nicht aufgenommen worden sind, und es nicht an besondern Schriftchen fehlt, in welchen das praktische Rechnen mit Logarithmen gelehrt wird.

Zum Schlusse fühlt der Verfasser sich verpflichtet, der verehrlichen Verlagshandlung für die schöne Ausstattung der Schrift seinen aufrichtigen Dank abzustatten.

Boppard a. Rh., im Juni 1891.

Werner Jos. Schüller.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Die natürlichen Zahlen.

Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Determinanten.

Gleichungen vom zweiten Grade.

Sechster Abschnitt.

Dritte Erweiterung des Zahlenbegriffs: irrationale Zahlen.

Siebenter Abschnitt.

Vierte Erweiterung des Zahlenbegriffs: imaginäre Zahlen.

Die komplexe Zahl.

Anhang.

Ergänzungen und Anmerkungen zur Arithmetik und Algebra.

Berichtigungen.

Seite	25		sind in den Zeilen 3 und 4 „Multiplikator“ und „Multiplikand“ zu vertauschen.
„	28,	Zeile	4 v. u. lies „Stolz“ statt „Stoll“.
„	136,	„	11 v. o. lies „$3a^2b$“ statt „$3ab$“.
„	161,	„	9 v. u. ist „$2a$“ zu tilgen.
„	194,	„	9 v. o. lies „57“ statt „47“.
„	217,	„	11 v. o. lies „$x = 7$“ statt „$x = 4$“.
„	249,	„	16 v. o. lies „1254“ statt „1280“.
„	270,	„	1 v. o. vertausche „addieren“ und „subtrahieren“.
„	284,	„	1 v. u. lies „96“ statt „97“.
„	286,	„	10 v. o. lies „24“ statt „18“.
„	366,	„	6 v. u. lies „— 24“ statt „— 25“.
„	384,	„	16 und 18 v. o. lies „186“ statt „196“.
„	408,	„	16 v. u. lies „A“ statt „A_1“.

Einleitung.

1) **Begriff und Einteilung der Mathematik.** Die Mathematik ist diejenige Wissenschaft, welche sich mit den Größen und zwar mit den Eigenschaften und der Vergleichung derselben beschäftigt. Der Ausdruck „Größe" bezeichnet ursprünglich die Eigenschaft eines Dinges, vermöge welcher dasselbe vermehrt oder vermindert werden kann. Betrachtet man nur diese Eigenschaft eines Dinges, so nennt man auch das Ding selbst eine Größe.

Alle Größen haben die Eigenschaft, daß sie aus Teilen bestehen. Hängen letztere ununterbrochen mit einander zusammen, so daß sie ein einziges Ganzes bilden, so nennt man die Größe eine stetige, z. B. die Zeit, die Linie, die Fläche, der Körper. Die Zeit schreitet lückenlos fort und das Ende eines Zeitteilchens kann als Anfang des folgenden aufgefaßt werden. Ebenso kann man sich jede Linie aus kleinen Teilchen zusammengesetzt vorstellen, so daß der Endpunkt des einen zugleich der Anfangspunkt des folgenden Teilchens ist. Auch die kleinsten Teilchen stetiger Größen tragen den Namen des Ganzen. — Sind die Teile, aus denen eine Größe besteht, getrennt, so daß jeder Teil für sich ein Ganzes ist, so heißt die Größe eine getrennte (unstetige). Zu letzteren gehören z. B. ein Dutzend Äpfel, ein viertel Eier, fünf Erdteile. — Alle Größen haben die Eigenschaft, daß sie gemessen werden können. Zum Messen ist ein Maß erforderlich, das als Maßeinheit anzusehen ist. Als Grundgesetz gilt: Eine Größe kann nur mit einer ihr gleichartigen verglichen und gemessen werden. So kann man z. B. Linien nur durch Linien (Längenmaß) messen. Als Maß-

einheit zum Messen eines Körpers dient ein Körpermaß (Würfel), und das Winkelmaß muß ein Winkel sein. — Der Einteilung der Größen in stetige und getrennte entsprechend zerfällt die Mathematik oder Größenlehre in zwei Hauptteile, nämlich in die Raumgrößenlehre oder Geometrie und in die Zahlenlehre oder Arithmetik.

2) **Begriff der Arithmetik.** Zahlenlehre hieß bei den alten Griechen jene theoretische Wissenschaft, deren Gegenstand die Zahl an und für sich, z. B. die Einteilung der Zahlen nach ihren besondern Eigenschaften und Eigentümlichkeiten war, im Gegensatz zur Logistik, worunter man die praktische Rechenkunst oder die Anleitung dazu verstand. Die Arithmetik der Griechen bildet die Grundlage der heutigen „Zahlentheorie", einer Disciplin, welche der neuesten Zeit angehört. Die alten Araber bezeichneten die Arithmetik der Griechen mit dem Namen „spekulative Arithmetik", während sie die eigentliche Rechenkunst, die Logistik, „praktische Arithmetik" nannten. Jetzt versteht man unter Arithmetik gewöhnlich das Rechnen sowohl mit bestimmten als mit allgemeinen Zahlen, die Buchstabenrechnung. Die Zahlenlehre hat die Aufgabe, den Zahlbegriff klar und deutlich zu bilden und die Gesetze zu lehren, nach welchen die Zahlen mit einander verknüpft werden müssen.

3) **Begriff der natürlichen Zahl.** Jeden einzelnen Gegenstand einer bestimmten Art nennen wir eine Einheit. Den Begriff der Einheit, das einmalige Vorhandensein einer Größe, bezeichnen wir mit dem Worte „eins". Die Eins bildet die Grundlage der Zahlen und sie ist selbst die erste oder ursprüngliche aus der unmittelbaren Anschauung hervorgegangene Zahl.*) Den Gegensatz zur Einheit bildet die Mehrheit, die Vielheit. Man versteht darunter eine Menge gleichartiger Dinge, d. h. den Inbegriff von getrennten Größen, deren Verschiedenheiten jedoch nicht inbetracht kommen. Durch Vergleichung der Vielheiten mit der Eins entstehen die übrigen natürlichen Zahlen.

*) Bei den Alten hat sich mehrere Jahrhunderte der Satz überliefert, daß die Eins Ursprung und Anfang aller Zahlen aber nicht selbst Zahl sei.

Sobald wir eine Vielheit — dieselbe ist an und für sich keine Zahl — durch die Eins messen, die Vielheit als Wiederholung der Eins bestimmt auffassen, geht erstere in den Charakter der Zahl über. Die Zahl kann daher kurz als eine bestimmte Vielheit definiert werden. Die Vergleichung der Vielheiten mit der Zahl eins, die Verstandesthätigkeit der Wiederholung von gleichartigen Einheiten, bei welcher nur das getrennte Vorhandensein von Dingen begrifflich erfaßt und sprachlich bezeichnet wird, heißt Zählen.*) Man kann daher auch sagen: aus der ursprünglichen Zahl eins bilden wir durch wiederholtes Hinzufügen der Eins und Vereinigung dieser erhaltenen Einheiten zu einem Begriffe die übrigen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Letztere besteht also aus der Zahl eins und Vielfachen derselben. Dieses Zählen, welches im Verknüpfen von Einheiten besteht, heißt Aufwärtszählen. Den Gegensatz zu letzterem bildet das Abwärtszählen, welches als eine Trennung verbundener Einheiten aufzufassen ist.

4) **Zahlwörter.** Die Namen für die Eins und die durch Zählen gebildeten neuen Zahlen nennen wir Zahlwörter. Würde man beim Zählen von Dingen jedes Stück durch „eins" bezeichnen, so entständen die natürlichen Zahlwörter: eins; eins-eins; eins-eins-eins, u. s. w. Statt dieser Bezeichnungen hat die Sprache viel kürzere Namen geschaffen, statt eins-eins sagt man kurz zwei u. s. f. Es genügt nicht, daß der Rechner die Namen für die Zahlen kennt, sondern er muß mit den Zahlwörtern die richtige Vorstellung als Summe der entsprechenden Einheiten verbinden und ihre natürliche Reihenfolge angeben können. So hat z. B. die klare Auffassung der Zahl zehn die gewonnenen Begriffe der vorhergehenden Zahlen zur Voraussetzung.

5) **Einteilung der Zahlen.** Man unterscheidet konkrete, benannte und abstrakte, unbenannte Zahlen, je nachdem sie mit

*) Das Zählen nur als das bewußte Zusammenfassen bestimmter Einzelwesen aufgefaßt, bildet, wie scharfsinnig hervorgehoben worden ist, keine menschliche Eigentümlichkeit; auch Tiere zählen ihre Jungen. (Hankel, Cantor.)

oder ohne Benennung erscheinen. 25 Mark, 6 Jahre, 30 Meter sind konkrete, 1, 5, 9 sind abstrakte Zahlen. Eine Zahl wird entweder als eine bestimmte oder als Zahl überhaupt gedacht. Im ersten Falle können wir uns die durch die Zahl bezeichneten Einheiten vorstellen, im andern Falle kommt die Menge der Einheiten nicht inbetracht. Jede Zahl, von deren Menge ihrer Einheiten man absieht, sondern die nur als Zahl überhaupt aufgefaßt und gedacht wird, heißt eine allgemeine Zahl. Letztere kann, da die Menge der Einheiten nicht bestimmt ist, jede Zahl bezeichnen.

6) **Zahlbezeichnung, Zahlzeichen.** Wenn man gleichartige Dinge, z. B. Stäbchen, Kugeln, Bäume zählt und für jedes abgezählte Stück einen Strich oder Punkt macht, so entstehen natürliche Zahlenbilder, z. B.

a) . : ∴ :: ⁙ I II III IIII

b) |——| |——|——| |——|——|——|

1 2 3

Stellen wir (siehe unter b) die Zahl eins durch eine bestimmte Strecke (Längeneinheit) dar, so versinnlicht die doppelt so große Strecke die Zahl zwei, die dreifache Länge die Zahl drei u. s. w.*) Diese natürlichen Zahlbilder stellen sämtliche Einheiten der durch sie bezeichneten Zahl sinnlich dar und haben

---

*) Die Neigung zur geometrischen Versinnlichung der abstrakten Zahlen und deren Verbindungen war eine Eigentümlichkeit der alten Griechen. Nach dem Zeugnisse Theons von Smyrna, der im 2. Jahrhundert n. Chr. lebte, haben die Pythagoräer die natürliche Zahlenreihe durch Punkte veranschaulicht, die in gleichen Abständen reihenweise untereinander gesetzt wurden. Da diese natürlichen Zahlenbilder die Form eines Dreiecks bildeten, so nannte man die Summe der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen von 1 bis zu einem beliebig gewählten Endgliede, also

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

Dreieckszahl.

also einen anschaulichen Inhalt. Unsere gebräuchlichen Zahlzeichen sind die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Diese sind willkürliche Zeichen für die Zahlen; man könnte jede Zahl statt durch Ziffern auch mittels anderer Zeichen darstellen. Die verschiedenen Kulturvölker aus verschiedenen Zeiten hatten auch verschiedene Zahlzeichen. Unsere modernen Ziffern sind aus den Zeichen der Westaraber und zwar den sogenannten Gubar- oder Staubziffern hervorgegangen, deren Erfindung den Indern zugeschrieben wird. Die Null ist das Zeichen für das Nichtvorhandensein einer Einheit und bezeichnet daher keine natürliche Zahl. Als Zahlzeichen wird die Null insofern mit Recht aufgefaßt, als sie zur Darstellung der Zahlen nicht entbehrt werden kann, z. B. in 10, 108, 200 u. s. w. Die indisch-arabischen Ziffern dienen zur Bezeichnung bestimmter Zahlen.

Als die Arithmetik sich vervollkommnete, stellte sich das Bedürfnis zur Einführung neuer Zahlzeichen ein. Seit dem Vorgange des Jordanus Nemorarius (im 13. Jahrh.) bedient man sich auch der Buchstaben als Zahlzeichen. Die Einführung der Buchstaben als Zahlzeichen erwies sich schon aus dem Grunde als zweckmäßig, weil sie bereits bekannte Zeichen waren. Zahlen im allgemeinen oder allgemeine Zahlen werden durch die kleinen und die großen Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet. Jeder Buchstabe kann jede bestimmte Zahl darstellen, die Buchstaben heißen deshalb allgemeine Zahlzeichen. Die Wahl der Buchstaben ist zwar gleichgiltig, doch besteht der Gebrauch, bekannte Zahlen durch die Anfangsbuchstaben a, b, c u. s. w., unbekannte oder gesuchte Größen mit den letzten Buchstaben x, y, z zu bezeichnen. Verschiedene Buchstaben bezeichnen im allgemeinen verschiedene Zahlen, sie können jedoch auch dieselbe Zahl ausdrücken. Dagegen vertritt ein Buchstabe in einem und demselben Rechenbeispiele stets nur einen bestimmten Zahlenwert. In der Aufgabe $x + 4 = 10$ vertritt das Zeichen x die Zahl 6; in dem Beispiele $x - 12 = 8$ den Wert 20, obgleich es überhaupt jede Zahl bezeichnen kann. Wird ein Buchstabe wiederholt gesetzt, so bezeichnet er stets dieselbe Zahl, z. B. in der Aufgabe $x + x + x + 6 = 30$ drückt das Zahl-

zeichen x jedesmal die Zahl 8 aus. — Der Kürze halber nennt man die bestimmten und allgemeinen Zahlzeichen auch „Zahlen"; man spricht schlechtweg von der Zahl x, anstatt zu sagen: „die Zahl, welche durch jenen Buchstaben bezeichnet werden soll."

7) **Dekadisches Zahlensystem.** So wie zur Darstellung der Zahlen eins bis neun, so hätte man auch zur Bezeichnung noch vieler anderer Zahlen besondere Zeichen erfinden können. Allein es liegt auf der Hand, daß es auch die schöpferischste menschliche Einbildungskraft und das vorzüglichste Gedächtnis übersteigt, für jede Zahl ein besonderes Zeichen zu ersinnen und diese unzähligen Zeichen aufzufassen und fest zu halten. Die höchst sinnreiche und großartige Erfindung, mit zehn einfachen Zeichen alle Zahlen darzustellen, wird von den Arabern den Gelehrten Indiens zugeschrieben.*) Jedes der zehn Zahlzeichen deutet an und für sich eine bestimmte Anzahl Einheiten an, dies ist der Nennwert der Ziffern. Bei zwei- und mehrstelligen Zahlen unterscheidet man „Ordnungen". Die niedrigste Ordnung der „Einer" kann 1 bis 9 Einheiten enthalten. Zehn Einer faßt man als eine neue Einheit auf und nennt sie zur Unterscheidung von den Einern einen Zehner. Weiter werden 10 Einheiten dieser (zweiten) Ordnung als Einheit einer höheren Ordnung unter dem Namen „ein Hunderter" zusammengefaßt. Durch Zusammenfassen von 10 Einheiten der Ordnung „Hunderter" in eine neue Einheit bildet man die Rangordnung der

*) Die Erfindung der Positions-Arithmetik gehört zu den großartigsten Leistungen des menschlichen Geistes. Die größten Männer, wie Leibniz, Newton und La Place, haben ihrer Verwunderung über das dekadische Zahlensystem Ausdruck gegeben. So sagt La Place: „Der Gedanke, alle Quantitäten durch zehn Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen absoluten und einen Stellenwert giebt, ist so einfach, daß man eben deshalb nicht genug anerkennt, welche Bewunderung er verdient. Aber eben diese Einfachheit und die Leichtigkeit, welche die Methode dem Rechner gewährt, erheben das arithmetische System der Indier in den Rang der nützlichsten Erfindungen. Wie schwer es aber war, eine solche Methode aufzufinden, kann man daraus entnehmen, daß sie dem Genie des Archimedes und des Apollonius von Pergae, zwei der größten Geister des Alterthums, entgangen war."

„Tausender". Überhaupt faßt man durchgängig 10 Einheiten irgend einer Ordnung als Einheit einer nächst höheren zusammen. Jede Ordnung kann 1 bis 9 Einheiten enthalten. Die Rangordnungen werden nun mit Hilfe der zehn Ziffern dargestellt, indem man dem Zahlzeichen, welches die Einheiten einer Ordnung angiebt, eine dem Rang der Ordnung entsprechende Anzahl Nullen anhängt. Die Einheiten der zweiten Ordnung stellt man durch Anhängung einer Null dar, die Ordnung der Hunderter bezeichnet man durch Anhängung von zwei Nullen u. s. w. Da das Rangzeichen Null selbst keinen Wert hat, sondern nur den voraufgehenden Ziffern Rang verleiht, dagegen auf die folgenden Ziffern keinen Einfluß ausübt, so kann man deren Platz mit andern Einheiten bedecken. Fünf Zehner und acht Einer können daher statt $50 + 8$ kurz durch 58 bezeichnet werden. Fünf Tausender, fünf Hunderter, fünf Zehner und fünf Einer kann man statt $5000 + 500 + 50 + 5$ kurz 5555 schreiben. Der Rang der Ziffern steigt also von rechts nach links, der Wert derselben ist von ihrer Stellung abhängig. Jede Ziffer hat außer ihrem Nennwert auch einen sogenannten Stellen- oder Positionswert, und zwar besitzt jede Einheit einer auf einer bestimmten Stelle stehenden Ziffer einen zehnmal so großen Wert als die Einheit der rechts stehenden Ziffer. Dieses Gesetz nennt man das zehnteilige (dekadische) Zahlensystem (Zehner- oder Dezimalsystem), die Zahl 10 heißt die Grundzahl desselben. Auf ihm beruht die Schreibung aller natürlichen Zahlen.

8) **Besondere und allgemeine Aufgaben.** Je nachdem in einer Aufgabe besondere (bestimmte) oder allgemeine Zahlzeichen vorkommen, unterscheidet man besondere und allgemeine Aufgaben. Eine besondere Aufgabe ist folgende: Es soll einerlei sein, ob man eine Zahl 10mal nimmt oder 10 zu derselben addiert. Wie heißt die Zahl? — Setzt man an Stelle der Ziffer 10 das allgemeine Zahlzeichen a, so hat man folgende allgemeine Aufgabe: Es soll einerlei sein, ob man eine Zahl mit a multipliziert oder a zu derselben addiert. Welches ist die Zahl?

9) **Besondere und allgemeine Arithmetik.** Die Arithmetik, welche nur bestimmte Zahlen betrachtet und mit einander verknüpft, heißt besondere oder gemeine Arithmetik. Das Ergebnis der Rechnung und Untersuchung in der gewöhnlichen Rechenkunst ist ein besonderes, das nur für den vorliegenden Fall giltig ist. Die gemeine Arithmetik hat nur besondere Aufgaben zum Gegenstande und alle Rechenoperationen können hier ausgeführt werden. — Das Rechnen mit bestimmten und allgemeinen Zahlzeichen ist Gegenstand der allgemeinen Arithmetik oder Buchstabenrechnung. Hier werden den Aufgaben und Untersuchungen in vielen Fällen allgemeine Zahlzeichen zugrunde gelegt, und das Ergebnis ist ein allgemeines, welches auf alle Fälle derselben Art anwendbar ist. In der Buchstabenrechnung können jedoch die Rechenoperationen meistens nicht wirklich vollzogen, sondern nur angedeutet werden. Die gewöhnliche Rechenkunst und die allgemeine Arithmetik stimmen hinsichtlich ihrer Lehren und Gesetze überein.

10) **Bedeutung der Buchstaben als Zahlzeichen.** Die Benutzung der Buchstaben als allgemeine Zahlzeichen hat vor dem Gebrauch der Ziffern wesentliche Vorteile. Mittels allgemeiner Zahlzeichen können wir alle Lehrsätze der Arithmetik so kurz und scharf darstellen, wie es durch die Wortsprache nicht möglich ist.*) So z. B. sagt die Zeichenverbindung $a = a$: Jede Größe ist sich selbst gleich. Löst man ein Beispiel mit bestimmten Zahlen, so erhält man das Ergebnis nur für diesen besondern Fall, während sich durch die Rechnung mit allgemeinen Zahlzeichen die Auflösung für alle Aufgaben einer Art ergiebt. Man hat dann in jedem einzelnen Falle nur an Stelle der Buchstaben die gegebenen bestimmten Zahlen zu setzen. Die Beweisführung der arithmetischen Lehrsätze mit Hilfe allgemeiner Zahlen verleiht diesen Wahrheiten allgemeine

*) „Die Sprache der Analysis, die vollkommenste aller Sprachen, ist schon an sich selbst ein mächtiges Hilfsmittel und Werkzeug der Entdeckung, und ihre Bezeichnungen, wenn sie glücklich gewählt sind und mit dem Gegenstande in notwendiger Beziehung stehen, enthalten die Keime neuer Rechnungsweisen." (La Place)

Giltigkeit und wissenschaftliche Strenge. Während ferner in der gewöhnlichen Rechenkunst bei Lösung von Aufgaben und bei Untersuchungen durch die zu bewerkstelligenden Rechnungen der Denkprozeß gehemmt wird, können wir die Resultate des Denkens, die Denkoperationen, mittels der Buchstaben kurz bezeichnen, wodurch die Arbeit des Rechners abgekürzt, vereinfacht und erleichtert wird. Endlich erzielen wir durch Anwendung der Buchstaben in vielen Fällen leichte Lösungen von Aufgaben, welche durch die Ziffernarithmetik nur durch ein mühevolles, zeitraubendes Verfahren bewerkstelligt werden können, und die Lösung solcher schwierigen Beispiele, welche die Kräfte der gemeinen Rechenkunst übersteigen.

11) **Ausdruck, Gleichung, Formel.** Jedes Zeichen für eine Zahl heißt Ausdruck. Durch Verknüpfung von zwei oder mehreren Zahlen durch Rechenzeichen entstehen mehrgliedrige Ausdrücke. Die einzelnen durch + und — verbundenen Teile nennt man Glieder des Ausdrucks. Nach der Anzahl der Glieder des Ganzen unterscheidet man eingliedrige, zweigliedrige (Binom), dreigliedrige (Trinom) und mehrgliedrige Ausdrücke. Bezeichnen zwei Ausdrücke a und b dieselbe Zahl, so sind dieselben gleich. Die Gleichheit zweier Ausdrücke wird durch das Gleichheitszeichen (=) dargestellt, welches „gleich" ausgesprochen wird. Durch Gleichstellung zweier gleichen Ausdrücke entsteht eine Gleichung. Die Gleichung $a = b$ wird gelesen: „a gleich b". Alle links und rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke heißen Seiten der Gleichung und die einzelnen durch + oder — mit einander verbundenen Größen werden Glieder der Gleichung genannt. Jede Buchstabengleichung, welche ein mathematisches Gesetz ausdrückt, heißt Formel. Die Gleichung $a + b = b + a$ ist eine Formel; denn sie stellt den Lehrsatz dar: „Man darf die Summanden einer Summe beliebig vertauschen." Die Darstellung der Ungleichheit zweier Zahlen nennt man Ungleichung. Daß eine Zahl a größer als b ist, wird $a > b$ bezeichnet. Ist a kleiner als b, so schreibt man dies $a < b$.

12) **Zahlverbindungen.** Jede Zahlverbindung ist eine

Zahl und sie kann daher wieder neue Verknüpfungen eingehen. Während in der gemeinen Rechenkunst die Zahlverknüpfungen berechnet werden, stellt man sie in der allgemeinen Arithmetik meistens bloß dar und denkt sich die Resultate. Jede Zahlverbindung ist selbstverständlich ihrem wirklichen Ergebnis gleich, so ist z. B. $5 \cdot 8$ stets gleich 40 und $72 : 9$ immer gleich 8.

Die Arithmetik behandelt sieben Zahlverbindungen, nämlich:

1) die Summe, $a + b$;
2) die Differenz, $a - b$;
3) das Produkt, $a \cdot b$;
4) den Quotienten, $a : b$;
5) die Potenz, $a^n = b$;
6) die Wurzel, $a = \sqrt[n]{b}$;
7) den Logarithmus, $n = {}^a\log b$.

Die diesen Zahlverknüpfungen entsprechenden Rechnungsverfahren heißen:

1) Addition;
2) Subtraktion;
3) Multiplikation;
4) Division;
5) Potenzierung;
6) Wurzelausziehen;
7) Logarithmierung.

Die beiden ersten Rechnungsarten heißen Operationen der ersten Stufe. Das Produkt und der Quotient sind Zahlverbindungen zweiter Stufe. Die drei letzten Zahlverbindungen nennt man Verknüpfungen der dritten Stufe. Zur Bezeichnung der Zahlverknüpfungen sind bestimmte Rechenzeichen, $+$, $-$ u. s. w. eingeführt.

13) **Die Grundsätze der Arithmetik.** Grundsätze nennt man solche Wahrheiten, deren Richtigkeit so unmittelbar einleuchtend ist, daß sie eines Beweises nicht bedürfen. Das System der Arithmetik beruht auf nur vier Grundsätzen, nämlich:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich, z. B. $1 = 1$. Formel: $a = a$.

2) Man kann für jede Zahl stets eine ihr gleiche setzen, ohne daß die Richtigkeit geändert wird. Ist $a = a'$, so muß auch $a + b = a' + b$ sein.

3) Zwei Zahlgrößen, von welchen jede einer dritten Zahl gleich ist, sind unter sich gleich. Wenn $a = c$ und $b = c$, so ist auch $a = b$.

4) Das Ganze ist der Summe seiner sämtlichen Teile gleich. Jeder Teil ist kleiner als sein Ganzes. (Hier ist vorausgesetzt, daß die Teile gleichartig sind.)

14) **Nutzen der Arithmetik.** Das Studium der Arithmetik (der Mathematik überhaupt) gewährt uns einen zweifachen Nutzen, einerseits finden die Lehren der Rechenkunst Anwendung auf fast alle Zweige menschlichen Wissens und Könnens, andererseits ist die Art und Weise, wie sie ihre Lehren begründet, also ihre Methode, die vollkommenste von allen Wissenschaften. Die Arithmetik hat zur Grundlage nur vier Grundsätze, deren Wahrheit ohne weiteres in die Augen springt. Sie begründet alle von ihr aufgestellten Behauptungen (Lehrsätze) so unwiderlegbar und scharf, daß jeder normal begabte Mensch ihnen zustimmen muß. Daher gehört die Arithmetik (Mathematik) zu den sogenannten exakten Wissenschaften. Männer wie Drobisch, Hankel u. a. haben speziell die Euklidische Methode der Geometrie als „ein in jeder Beziehung unübertroffenes Meisterwerk" gepriesen.*)

*) „Die Mathematik ist eine Wissenschaft aus reinen Begriffen, daher abstrakt und nicht so leicht faßlich zu lehren und zu lernen, als andere Wissenschaften, in welchen die Begriffe neben einander liegen und die meistens nur das Gedächtnis, den Verstand und den Scharfsinn aber wenig in Anspruch nehmen und üben." Lübsen. — „Der bildende Einfluß der Mathematik liegt vorzugsweise darin, daß der Schüler denken und reden lernt." Bardey. — „Die nächste Generation wird die Notwendigkeit einsehen, Mathematik zu studieren." Herbart.

Erster Abschnitt.

Die natürlichen Zahlen.*)

§ 1. Graphische Darstellung des unbegrenzten natürlichen Zahlengebietes.

Wir können uns die Reihe der natürlichen Zahlen von 0 bis ∞ auf folgende Weise versinnlichen. Von einem beliebigen Punkt in der Ebene aus setzen wir Punkte in gleicher Entfernung von einander, die sämtlich in einer Geraden liegen, und wir stellen uns vor, diese Punktreihe laufe bis ins Unendliche fort. Den Anfangspunkt der Reihe bezeichnen wir mit 0 und den folgenden Punkten ordnen wir (zum Teil wirklich, den übrigen in der Vorstellung) die entsprechenden Zahlen zu, so daß die Strecke 0 bis 1, kurz $\overline{0,1}$, die Zahl 1, die Länge $\overline{0,2}$ die Zahl 2, überhaupt die Strecke $\overline{0,n}$ die Zahl n versinnlicht.**) Wir haben also folgendes anschauliche Bild der natürlichen Zahlenreihe:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \infty \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & & & & & & \end{array}$$

Da jeder Punkt in diesem Bilde durch seinen Abstand vom Anfangspunkt 0 eine bestimmte Länge oder Strecke darstellt, so können wir mit Beziehung eines jeden Punktes auf den Nullpunkt auch sagen, jeder Punkt dieser Reihe versinnliche eine Zahl. — Dieses Zahlenbild genügt der Zahlenreihe vollständig; denn 1) entspricht dem Zahlzeichen 0, welches

---

*) Man wiederhole zunächst das in der Einleitung unter 3 bis 7 Gesagte.

**) Vergleiche Nr. 6 der Einleitung.

das Nichtvorhandensein der Einheit bezeichnet, der geometrische Punkt. Der mit dem Zeichen 0 versehene Bildpunkt der Reihe soll aber eigentlich den Anfangspunkt einer unbegrenzten Geraden vorstellen, wie wir später sehen werden; 2) einer beliebigen Zahl n der Zahlenreihe entspricht ein Punkt, der vom Anfangspunkt um eben so viele Längeneinheiten entfernt liegt, als die ihm zugeordnete Zahl Einheiten enthält; 3) wie die Zahlenreihe ohne Ende fortschreitet, so erstrecken die Punkte des Bildes sich bis ins Unendliche fort.

Die sechs Grundrechnungsarten mit natürlichen Zahlen.

A. Rechnungsarten erster Stufe.

Mit Hilfe der graphischen Zahlendarstellung im vorigen Paragraphen kann man die Begriffe der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation und der Division durch wahrnehmbare Operationen erzeugen.

Wir nennen den geraden Weg von irgend einem Punkte bis zum nächstfolgenden „einen Schritt vorwärts" und die Entfernung von einem beliebigen Punkt bis zum nächstvorhergehenden „einen Schritt rückwärts".

I. Addition.

§ 2. Begriff der Addition.

Die arithmetische Aufgabe $3 + 5$ auf unsere Abbildung der Zahlen übertragen, bedeutet: Man soll von dem die Zahl 3 versinnlichenden Punkt aus um 5 Schritte vorwärtsschreiten. Durch Ausführung dieser Thätigkeit gelangt man zu dem Punkt, welchem die Zahl 8 zugeordnet ist; folglich ist $3 + 5 = 8$. Die Addition wird also bildlich ausgeführt, indem man vom Endpunkt der die eine Zahl veranschaulichenden Strecke aus um so viele Schritte auf dem Zahlenbilde vorwärts geht, als die andere Zahl Einheiten enthält. Die Zahl b im bildlichen Sinne zu a addieren heißt, von dem der Zahl a entsprechenden Punkt der Zahlenreihe aus um so viele Schritte vorwärtsschreiten, als die Zahl b Einheiten darstellt.

Benutzen wir zur Veranschaulichung und Erläuterung der Addition die Einleitung 6) angegebenen natürlichen Zahlenbilder, so ist z. B.:

5 + 3 = ⁙ + ∴ = ∷∷ = 8.

Hieraus fließt folgende Definition: Zwei Zahlen addieren heißt, ihre natürlichen Zahlbilder zu einem einzigen vereinigen und für das erhaltene Zahlbild die entsprechende Zahl setzen. Mit dieser Definition ist die folgende gleichbedeutend: Eine Zahl b zu einer andern a addieren heißt, eine dritte Zahl finden, die so viel Einheiten enthält als die gegebenen Zahlen zusammen darstellen. Die zu addierenden Zahlen heißen Summanden, Posten oder Glieder. Das Ergebnis der Addition nennt man Summe. In der Gleichung $8 + 4 = 12$ heißt $8 + 4$ „formelle Summe", die Zahlgröße 12 dagegen, welche das Ergebnis der Rechnung anzeigt, wird „wirkliche Summe" genannt. Als Zeichen der Addition dient ein stehendes Kreuz (+), welches in der gewöhnlichen Rechenkunst „und", in der allgemeinen Arithmetik aber „plus" ausgesprochen wird. Jede Zahlenverbindung durch das Zeichen + nennt man schlechtweg Summe; die rechnerische Arbeit, welche die formelle Summe verlangt, die der Summe entsprechende Operation, heißt Addieren. In der Aufgabe $9 + 6$, allgemein $a + b$, kommen drei Größen inbetracht, nämlich zwei Summanden, und die dritte Größe, die Summe, soll ermittelt werden. Jede Summe muß mindestens zwei Glieder enthalten. Besteht dieselbe aus mehreren (gleichartigen) Teilen, z. B. $15 + 12 + 9 + 6$, so sind die gegebenen Definitionen der Addition ebenfalls giltig.

§ 3. Grundgesetze der Addition.

Beispiele:

$12 + 8 = 20$; $64M + 36M = 100M$.

5 Zehner + 8 Einer = 50 Einer + 8 Einer = 58.

1) Nur abstrakte Zahlen oder gleichartige, d. h.

gleichbenannte Zahlen*) können addiert werden, im letzteren Falle ist die Summe mit ihren Gliedern gleichbenannt. Denn man kann nur unbenannte oder gleichbenannte Einheiten zählen. Die Richtigkeit dieses Grundgesetzes liegt also im Begriffe der Zahl.

Beispiele:

⁘⁚ + ⁚⁚ = ⁚⁚ + ⁘⁚ = ⁚⁚⁚⁚⁚

$$6 + 4 = 4 + 6.$$

Beweis für die Richtigkeit der letzteren Gleichung:

$$6 + 4 = \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot$$
$$+ \cdot + \cdot + \cdot + \cdot$$

Es ist nun offenbar einerlei, an welcher Stelle die Addition dieser Einheiten beginnt. Man addiere nun zuerst die Einheiten der zweiten Reihe und vermehre das Ergebnis um die Einheiten der ersten Reihe. Die Summe beider Reihen ist offenbar $4 + 6$. Mithin ist: $6 + 4 = 4 + 6$.

2) **Lehrsatz:** Man kann die Summanden einer Summe beliebig vertauschen.

In allgemeinen Zeichen: $a + b = b + a$.

Dieses Gesetz wird das „Gesetz der Vertauschung der Summanden" oder das Kommutationsgesetz genannt. Weil man die zu addierenden Zahlgrößen vertauschen darf, deshalb führen sie den gemeinschaftlichen Namen „Summanden".

Beispiele:

$$\begin{array}{r} 10 = 10 \\ 5 = 5 \\ \hline 15 = 15. \end{array}$$

Den Strich lies „folglich".

Allgemein:

$$\begin{array}{c} a = b \\ c = d \\ \hline a + c = b + d. \end{array} \quad \text{(addiert)}$$

*) bezw. solche, die man gleichnamig machen kann, z. B. 6 Jahre + 24 Monate = 6 Jahre + 2 Jahre = 8 Jahre.

Beweis für Gleichung (2): Nach dem Grundsatze „Jede Größe ist sich selbst gleich", ist: $b + d = b + d$.

Gemäß der Voraussetzung $a = b$ kann man auf der linken Seite der letzten Gleichung a an Stelle von b, und weil ferner $c = d$ sein soll, c für d setzen. Man erhält alsdann:

$$a + c = b + d.$$

3) **Lehrsatz:** Gleiches zu Gleichem addiert, giebt Gleiches.

Die Umkehrung dieses Lehrsatzes lautet: Wenn man zu zwei Zahlgrößen zwei andere addiert und dadurch gleiche Summen entstehen, so sind die addierten Größen einander gleich.

Ist z. B. $8 = 8$

$\underline{8 + 4 = 8 + x}$

so muß $4 = x$ sein.

Wenn $a = b$

und $\underline{a + c = b + d}$

so ist $c = d$.

Aus vorstehendem Lehrsatz folgt, wenn $a = a'$, so ist $a + b > a$.

Beispiele:

$$(96 + 48) + 4 = (96 + 4) + 48 = 100 + 48 = 148.$$

$$(258 + 39) + (21 + 42) = (258 + 42) + (39 + 21)$$
$$= 300 + 60 = 360.$$

4) **Lehrsatz:** Eine Zahl wird zu einer Summe addiert, indem man sie zu einem Summanden addiert. Umgekehrt:

5) Eine Summe wird zu einer Zahl addiert, indem man zuerst einen Summanden und zu der erhaltenen Summe die übrigen Glieder in beliebiger Ordnung addiert.

In allgemeinen Zeichen:

$$a + (b + c) = (a + c) + b = (a + b) + c.$$

Das letztere Gesetz heißt „Associationsgesetz der Addition.“

6) Anwendung des Associationsgesetzes. Mit Hilfe des Associationsgesetzes kann man die Arbeit des Addierens manchmal vereinfachen und erleichtern, z. B. in folgenden Beispielen:

$$598 + 675 + 402 + 325; \quad 8792 + 9854 + 684 + 146 + 146 + 5996 + 208 + 816.$$

Mit Benutzung des Associationsgesetzes läßt sich leicht die Richtigkeit der folgenden Formeln beweisen.

1) Wenn $a = a'$
und $b > b'$
so ist: $a + b > a' + b'$,
d. h. in Worten: Größeres zu Gleichem addiert, giebt Größeres.

2) Ferner wenn $a = a'$
und $b < b'$
so ist: $a + b < a' + b'$,
d. h. in Worten: Kleineres zu Gleichem addiert, giebt Kleineres.

3) Ungleiches zu Gleichem addiert, giebt Ungleiches.

II. Subtraktion.

§ 4. Begriff der Subtraktion.

Um eine Aufgabe des Abziehens, z. B. 12 — 4, mit Hilfe unserer graphischen Abbildung der Zahlen (§ 1) zu berechnen, muß man entweder von dem die Zahl 12 darstellenden Punkt des Zahlenbildes aus um vier Schritte (Punkte) rückwärtsschreiten, oder von dem die Zahl 4 versinnlichenden Punkt aus um so viele Schritte vorwärtsgehen, bis man an den Punkt gelangt, der die Zahl 12 veranschaulicht. Allgemein eine Zahl b von einer anderen a bildlich subtrahieren heißt, von dem die Zahl a vorstellenden Punkt des Zahlenbildes aus um so viele Schritte rückwärtsgehen, als b Einheiten enthält. Beim Subtrahieren

kommen also drei Größen inbetracht. Die Zahl a, von welcher subtrahiert wird, heißt Vollzahl oder Minuend, die zu subtrahierende Zahl b wird Subtrahend (Abzug) und das Ergebnis dieser Operation Differenz (Rest) genannt. Die Subtraktion wird durch das Zeichen — ausgedrückt, welches „minus" oder „weniger" ausgesprochen wird.

Eine zweite Begriffsbestimmung der Subtraktion ergiebt sich aus der Gleichung $x + 8 = 20$ (allgemein $x + b = a$). In dieser Gleichung ist 8 bekannter, x unbekannter Summand und die Zahlgröße 20 stellt die Summe vor. Wir können uns nun die Aufgabe vorlegen, welche bestimmte Zahl ist an Stelle von x zu setzen, damit obige Gleichung befriedigt, d. h. identisch wird? Mit anderen Worten: wie findet man aus der Summe und einem bekannten den unbekannten Summanden? Die Lösung dieser Aufgabe (Frage) führt uns auf die Subtraktion. Es ist offenbar: $x = 20 - 8$, allgemein $x = a - b$. Hiernach heißt eine Zahl von einer anderen subtrahieren, aus der Summe und einem Summanden den anderen Summanden finden. Definitionsformel:

$$\text{I.}\quad (a + b) - b = a.$$

Die Subtraktion ist also die der Addition entgegengesetzte Rechnungsart, sie ist die Umkehrung der Addition. Bei dieser Umkehrung wird das Ergebnis, die Summe a zum Minuenden, der bekannte Summand b zum Subtrahenden und der gesuchte (unbekannte) Summand x zum Rest (Differenz). Setzen wir in der obigen Grundgleichung $x + b = a$, von der wir ausgingen, an Stelle von b die Zahlgröße S (Subtrahend), statt x die Differenz D und für a den Minuenden M, so geht erstere Gleichung in die folgende über:

$$\text{II.}\quad M = S + D.$$

Diese Formel drückt das Hauptgesetz der Subtraktion aus, welches lautet:

Hauptgesetz der Subtraktion: Der Minuend ist gleich der Summe aus dem Subtrahenden und dem Rest.

Dieses Gesetz wird angewendet um die Unbekannte x in

Gleichungen von der Form $x - b = a$ zu bestimmen. Man erhält $x = a + b$.

Aus der Gleichung $S + D = M$ fließt ferner folgende sehr gebräuchliche Definition der Subtraktion, welche wegen ihrer allgemeinen Gültigkeit besondere Beachtung verdient. Eine Zahl b von einer anderen a subtrahieren heißt, eine dritte Zahl finden, welche zu b addiert, a zur Summe giebt. In allgemeinen Zahlen:

$$\text{III.} \quad (a - b) + b = a.$$

Vorstehende Gleichung spricht außerdem noch folgende Wahrheit aus:

Eine Zahl a bleibt ungeändert, wenn man von derselben eine andere b subtrahiert und zu der erhaltenen Differenz $a - b$ dieselbe Zahl addiert.

Formel (I) läßt noch folgende Deutung zu:

Eine Zahl ändert sich nicht, wenn man zu derselben eine andere Zahl addiert und von der Summe die nämliche Zahl subtrahiert. — Addition und Subtraktion mit denselben Zahlen vollzogen, heben sich gegenseitig auf.

Während die Addition zweier natürlichen Zahlen in allen Fällen ausführbar ist, kann die Subtraktion nur in dem Falle ausgeführt werden, wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend. Die gegebenen Definitionen der Subtraktion fordern sämtlich die Bedingung oder Einschränkung, daß $a > b$ ist, wenn die Differenz eine natürliche Zahl sein soll.

§ 5. Grundgesetze der Subtraktion.

Beispiele:

$$15 - 7 = 8; \quad 20\,\mathcal{M} - 8\,\mathcal{M} = 12\,\mathcal{M}.$$

1) Nur gleichbenannte oder abstrakte Zahlen können von einander subtrahiert werden. Die Differenz erhält dieselbe Benennung wie Minuend und Subtrahend. Dies folgt notwendig aus dem ersten Grundgesetze der Addition und aus dem Begriffe der Subtraktion.

2) **Hauptgesetz:** Der Minuend ist gleich der Summe aus dem Subtrahenden und dem Rest. (Siehe § 4.)

Wenn also $x - a = b$, so ist $x = a + b$.

Aus der Gleichung $12 - 4 = 8$ folgt $12 - 8 = 4$. Wenn $a - x = b$, so ist $x = a - b$. Aus Formel III ergiebt sich:

$$a - (a - b) = b.$$

3) Man findet aus dem Minuenden und der Differenz den Subtrahenden, indem man die Differenz vom Minuenden subtrahiert.

Diese Wahrheit kann auch in folgender Form ausgesprochen werden: Man kann Subtrahend und Differenz mit einander vertauschen. Die Richtigkeit dieses Gesetzes ergiebt sich ohne weiteres aus dem Kommutationsgesetze der Addition.

Man wendet vorstehendes Gesetz an, um den Wert der Unbekannten x in Gleichungen von der Form $a - x = b$ zu berechnen.

Beispiele:

$$x + 16 = 40, \qquad x = 40 - 16;$$
$$x + a = b, \qquad x = b - a.$$

Definitionsformel II: $(a + b) - b = a$.

4) Man erhält aus der Summe und einem bekannten Summanden den unbekannten, wenn man den gegebenen Summanden von der Summe abzieht.

Dieses Gesetz benutzt man, um die Unbekannte x in Gleichungen von der Form $x + b = a$ zu bestimmen.

Beispiele:

$$1) \begin{cases} 16 - 4 = (16 + 4) - (4 + 4) = 20 - 8 = 12. \\ a - b = (a + m) - (b + m). \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 106 - 26 = (106 - 6) - (26 - 6) = 100 - 20 = 80. \\ a - b = (a - m) - (b - m). \end{cases}$$

Gesetz der Wertbeständigkeit einer Differenz:

5) Der Wert einer Differenz bleibt ungeändert, wenn man sowohl zum Minuenden als zum Subtra-

henden dieselbe Zahl addiert, oder von beiden die nämliche Zahl subtrahiert.

Beispiele:

$$5 - 5 = 0, \quad 20 - 20 = 0. \quad m - m = 0.$$

Wenn in der allgemeinen Differenz $a - b$ der Subtrahend $b = a$ wird, so bleiben nach Ausführung der Subtraktion keine Einheiten übrig. Die Differenz $a - a$ kann also keine natürliche Zahl sein. Für den Wert einer Differenz mit gleichem Minuenden und Subtrahenden hat man das Zeichen 0 eingeführt, welches „Null" ausgesprochen wird. Die Null ist also das Zahlzeichen für das Nichtvorhandensein der Einheit. (Vergleiche Einleitung, 6.)

6) **Lehrsatz:** Die Differenz zweier gleichen Zahlen ist der Null gleich.

§ 6. Gesetze der ersten Stufe.

Lehrsätze über die Addition und die Subtraktion von Summen und Differenzen.

Beispiele:

$$(24 + 69) - 14 = (24 - 14) + 69 = 10 + 69 = 79.$$

$$(348 + 564) - 264 = 348 + (564 - 264) = 348 + 300 = 648.$$

$$79368 + 9836 - 9368 = (79368 - 9368) + 9836 = 79836.$$

I. Formel: $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$.

1) **Lehrsatz:** Eine Zahl wird von einer Summe subtrahiert, indem man sie von **einem** Summanden subtrahiert und zu der erhaltenen Differenz den (bezw. die) anderen Summanden addiert.

Durch Umkehrung der Formel I, d. h. durch Vertauschung beider Seiten dieser Gleichung, gewinnt man den allgemeinen arithmetischen Ausdruck der folgenden

2) **Lehrsätze:** α) Eine Zahl b wird zu einer Differenz $(a - c)$ addiert, indem man die Zahl b zum Minuenden a addiert und von der entstandenen Summe den Subtrahenden subtrahiert.

β) Eine Differenz $(b - c)$ wird zu einer Zahl a addiert, indem man den Minuenden b zur Zahl a addiert und von dieser Summe $(a + b)$ den Subtrahenden c subtrahiert.

Die Beweise für die Richtigkeit der Formeln bezw. die Gesetze der Subtraktion führe man mit Benutzung des Hauptgesetzes der Subtraktion $M = S + D$.

Beispiele:

$$(84 - 25) - 14 = (84 - 14) - 25 = 70 - 25 = 45.$$

$$(824 - 265) - 324 = (824 - 324) - 265 = 500 - 265 = 235.$$

$$(1276 - 328) - 548 = 1276 - (328 + 548) = 1276 - 876 = 400.$$

II. Formel: $(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$.

3) **Lehrsatz:** Eine Zahl c wird von einer Differenz $a - b$ subtrahiert, indem man sie entweder vom Minuenden subtrahiert und von dieser Differenz $a - c$ den Subtrahenden abzieht, oder den Minuenden um die Summe aus dem Subtrahenden b und der Zahl c vermindert.

Wenn wir die Gleichung (II) von rechts nach links lesen, so spricht sie folgenden Lehrsatz aus:

4) **Lehrsatz:** Eine Summe $b + c$ wird von einer Zahl a subtrahiert, indem man jeden Summanden subtrahiert.

Die in vorstehenden Lehrsätzen ausgesprochenen Wahrheiten können in einen Satz zusammengefaßt werden, nämlich in den

5) **Hauptsatz:** Wenn mehrere Zahlen addiert und subtrahiert werden sollen, so ist die Reihenfolge der Operationen gleichgültig.

Beispiele:

$$(54 - 18) + (82 - 28) = (54 + 82) - (18 + 28) = 136 - 46 = 90.$$

$$(620 - 64) + (330 - 76) = (620 + 330) - (64 + 76)$$
$$= 950 - 140 = 810.$$

III. Formel: $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$.

6) **Lehrsatz:** Zwei Differenzen werden addiert, wenn man von der Summe der Minuenden die Summe der

Subtrahenden subtrahiert. (Dieses Gesetz gilt auch für mehrere Differenzen.)

Beispiele:

$$72 - 29 = 72 - (30 - 1) = (72 - 30) + 1 = 42 + 1 = 43.$$
$$165 - 99 = 165 - (100 - 1) = (165 + 1) - 100 = 66.$$

IV. Formel: $a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b.$

7) **Lehrsatz:** Eine Differenz $b - c$ wird von einer Zahl a subtrahiert, indem man den Minuenden b von der Zahl a subtrahiert und zu der erhaltenen Differenz $a - b$ den Subtrahenden c addiert, oder indem man von der Summe aus der Zahl und dem Subtrahenden $a + c$ den Minuenden b subtrahiert.

B. Rechnungsarten zweiter Stufe.

III. Multiplikation.

§ 7. Begriff der Multiplikation.

Beispiele:

$$\begin{matrix}\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{matrix} + \begin{matrix}\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{matrix} + \begin{matrix}\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{matrix} = 3 \times 4.$$
$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5.$$
$$n + n + n + n + n + n = 6 \times n = 6n.$$
$$5\mathcal{M} + 5\mathcal{M} + 5\mathcal{M} = 3 \times 5\mathcal{M} = 15\mathcal{M}.$$

Sind die Teile einer Summe gleich, so läßt sich die Additionsaufgabe auf eine kürzere Weise darstellen und berechnen. Man sieht zu, wie oft der gleiche Summand gesetzt ist und verbindet diese (abstrakte) Zahl mit dem Summanden durch das Zeichen $\times$ oder $\cdot$, welches „mal" ausgesprochen wird. Eine Zahlenverbindung durch das Zeichen $\times$, z. B. 3×6, heißt formelles Produkt. Die durch ein Produkt angedeutete rechnerische Operation nennt man Multiplizieren. Eine Zahl b mit a multiplizieren heißt, b so oft als Summanden setzen, als a Einheiten enthält. Nach dem Begriffe der Multiplikation ist also:

$$p \times q = q + q + q + q + q \cdots\cdots \text{(pmal)}.$$

Das Ergebnis der Multiplikation heißt wirkliches Produkt. So ist z. B. die Zahl 20 das wirkliche Produkt von 4×5. In jedem formellen Produkt $p \times q$ oder pq nennt man den ursprünglichen Summanden q den Multiplikanden und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Multiplikand gesetzt werden soll, den Multiplikator des Produktes. Da man jede einfache natürliche Zahl als Summe bestehend aus einem Gliede auffassen kann, so setzt man fest, daß $1 \cdot a = a$ ist.

Aus Vorstehendem folgt, daß die Operation der Multiplikation aus der Addition hervorgeht. Die Multiplikation geschieht ursprünglich durch wiederholtes Addieren des gleichen Summanden. Wollten wir indes die Multiplikation, namentlich von größeren Zahlen, durch wiederholte Addition des Multiplikanden vollziehen, so wäre für das praktische Rechnen nichts gewonnen. Soll die Multiplikation eine selbständige, von der Addition unabhängige Operation sein, so ist es nur nötig, die Grundfälle des Multiplizierens, nämlich das sogenannte Einmaleins, als Grundlage derselben zu betrachten. Dadurch sind wir imstande, das Multiplizieren selbständig, direkt, auszuführen.

Zur Bildung des Multiplikationsbegriffs und zur Veranschaulichung der Grundfälle der Multiplikation sind graphische Darstellungen in Form von „Zahlenbildern" zweckmäßig. Der Nutzen, der veranschaulichende Wert, solcher Darstellungen dürfte aus der Versinnlichung der Reihe 1×3 bis 10×3 erhellen.

$\cdot\cdot\cdot = 1 \times 3$	$+ \cdot\cdot\cdot = 6 \times 3$
$+ \cdot\cdot\cdot = 2 \times 3$	$+ \cdot\cdot\cdot = 7 \times 3$
$+ \cdot\cdot\cdot = 3 \times 3$	$+ \cdot\cdot\cdot = 8 \times 3$
$+ \cdot\cdot\cdot = 4 \times 3$	$+ \cdot\cdot\cdot = 9 \times 3$
$+ \cdot\cdot\cdot = 5 \times 3$	$+ \cdot\cdot\cdot = 10 \times 3.$

Wenn wir die Multiplikations-Aufgabe 3×4 auf unsere Abbildung der natürlichen Zahlen (§ 1) übertragen, so hat dieselbe folgenden Sinn: Schreite vom Anfangspunkt (Null) aus dreimal um einen Schritt von vier Längen weiter. Die

Multiplikation wird hier also bildlich ausgeführt, indem man vom Anfangspunkt der Zahlenreihe aus so oft um eine den Einheiten des Multiplikators entsprechende Länge fortschreitet, als der Multiplikand Einheiten enthält.

§ 8. Grundgesetze der Multiplikation.

Aus dem Begriffe der Multiplikation ergeben sich ohne weiteres die folgenden Wahrheiten:

1) Jedes Produkt läßt sich durch diejenige Summe ersetzen, welche den Multiplikanden so oft als Summand enthält, als der Multiplikator anzeigt; so ist z. B.

$$3 \times 8 = 8 + 8 + 8$$

$$4a = a + a + a + a.$$

2) Jede Summe aus gleichen Gliedern kann durch ein Produkt dargestellt werden, welches das Glied als Multiplikand und die Zahl der Summanden als Multiplikator enthält.

3) Der Multiplikator des Produktes muß stets eine abstrakte Zahl sein. Diese Wahrheit findet ihre Begründung in der Entstehung und dem Begriffe des Multiplikators, er zählt nämlich, „wie oft" der gleiche Summand (Multiplikand) zu setzen ist. Der Multiplikand dagegen kann eine benannte (konkrete) Zahl sein, da eine Summe auch aus gleichbenannten Teilen bestehen kann; das Produkt ist stets mit ihm gleichbenannt. Produkte mit zwei Benennungen, z. B. 4 Meter $\times$ 3 Meter, sind widersinnig.

Um das Hauptgesetz der Multiplikation, das Gesetz der Vertauschung von Multiplikand und Multiplikator, zu entwickeln, gehen wir von einem bestimmten Beispiele aus. Wir zeigen etwa, daß $4 \times 5 = 5 \times 4$ ist. Den Multiplikanden 5 ersetzen wir durch so viele Punkte, als derselbe Einheiten enthält. Nach dem Begriffe der Multiplikation ist die entsprechende Anzahl Punkte viermal zu setzen, wodurch die folgende anschauliche Darstellung entsteht:

$$\begin{array}{llllll} 4 \times 5 = & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \times 4.$$

Die in der „wagrechten" Reihe stehenden Punkte versinnlichen den Multiplikanden und die in der „senkrechten" Reihe stehenden den Multiplikator. Sämtliche Punkte geben den Wert des Produktes von 4mal $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = 4 \times 5$ an. In jeder senkrechten Reihe befinden sich vier Punkte. Da fünf dieser Reihen vorhanden sind, so erhält man durch Addition der senkrechten Reihen die Summe von $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ Punkten. Diese Summe aber kann man kürzer durch das Produkt 5×4 ausdrücken. Da nun die in der Darstellung gegebene Punktsumme für beide Fälle den Wert der Produkte angiebt, so muß $4 \times 5 = 5 \times 4$ sein. In derselben Weise läßt sich für jedes andere Produkt mit unbenannten Zahlen die Zulässigkeit der Vertauschung erweisen, man kann daher allgemein $ab = ba$ setzen.

4) **Hauptgesetz der Multiplikation:** In jedem Produkte kann man Multiplikand und Multiplikator miteinander vertauschen.

Ist der Multiplikand eines Produktes eine benannte Zahl, so muß man bei der Vertauschung seine Benennung dem neuen Multiplikanden beisetzen. So ist z. B. 64 · 6 *M* = 6 · 64 *M*. Das vierte Gesetz heißt „Kommutationsgesetz der Multiplikation". Weil die Multiplikation auch dem kommutativen Gesetz unterworfen ist, so bezeichnet man die Zahlgrößen in einem Produkt mit dem gemeinschaftlichen Namen „Faktoren".

Entwickelung des Associationsgesetzes der Multiplikation.

Beispiel:

$$\begin{array}{rrl} 3 \times (4 \times 5) = & 4 \times 5 = & 5 + 5 + 5 + 5 \\ & + 4 \times 5 = & 5 + 5 + 5 + 5 \\ & + 4 \times 5 = & 5 + 5 + 5 + 5 \\ \hline \end{array}$$

Die senkr. Reihen addiert, giebt $(3 \times 5) + (3 \times 5) + (3 \times 5) + (3 \times 5)$.

Diese Summe enthält 4 gleiche Glieder, weshalb wir sie durch das Produkt $4 \times (3 \times 5)$ bezeichnen können. Es ist daher $3 \times (4 \times 5) = 4 \times (3 \times 5)$.

5) **Associationsgesetz:** Ein Produkt wird mit einer Zahl multipliziert, indem man nur **einen** Faktor mit der Zahl und das erhaltene Produkt mit dem andern Faktor multipliziert.

Umkehrung: Eine Zahl wird mit einem Produkt multipliziert, indem man sie zuerst mit **einem** Faktor und das erhaltene Produkt mit dem andern Faktor multipliziert.

In allgemeinen Zahlen:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = (a \times c) \times b.$$

Durch Verknüpfung des Kommutations- und des Associationsgesetzes gelangt man zu folgender praktischen

6) **Hauptregel:** Man kann die Faktoren eines Produktes beliebig vertauschen.

Für die Multiplikation gilt ein ähnliches Gesetz wie bei der Addition, nämlich:

7) **Lehrsatz:** Gleiches mit Gleichem multipliziert giebt Gleiches.

Wenn $a = a'$ und $b = b'$, so ist $ab = a'b'$.

Beweis. Nach einem Grundsatze der Größenlehre ist $ab = ab$. Da man nach der Voraussetzung auf der rechten Seite dieser Gleichung a' an Stelle von a und b' für b setzen kann, so muß $ab = a'b'$ sein. Die Umkehrung lautet: Wenn durch Multiplikation zweier Zahlen mit zwei **gleichen** Zahlen **gleiche** Resultate entstehen, so sind erstere einander gleich.

$$\begin{array}{rl} \text{Wenn} & b = b' \\ \text{und} & \underline{ab = a'b'} \\ \text{so muß} & a = a' \text{ sein.} \end{array}$$

8) Für die Multiplikation gilt auch das sogenannte distributive Gesetz. Um die Formeln des Distributivgesetzes so einfach als möglich darzustellen, ist eine Übereinkunft darüber nötig, wie Verknüpfungen von Zahlverbindungen aufzufassen sind. Da wir gewohnt sind von links nach rechts zu schreiben und zu lesen, so müssen wir die Denkoperationen in derselben Richtung darstellen und ausführen. a) Enthält daher eine Zahlenverbindung (Ausdruck) ohne Klammern Rechenzeichen einer Stufe, so ist der Gang der Rechnung stets von links nach rechts. So ist z. B. $12 - 8 + 5 = 4 + 5 = 9$. b) Kommen dagegen in einem klammerlosen Ausdruck Operationen verschiedener Stufe vor, so muß die höhere Operation vor der niederen ausgeführt werden.*) Es ist daher $4 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$; $a - b + c \cdot d = (a - b) + cd$; und $a \cdot c + b \cdot c$ ist gleichbedeutend mit $(a \cdot c) + (b \cdot c)$.

§ 9. Lehrsätze über die Multiplikation von Summen und Differenzen.

In der Raumlehre wird gezeigt, daß man den Flächeninhalt eines Rechtecks findet, indem man die gleichnamigen Maßzahlen von Grundseite und Höhe multipliziert und das Produkt in der entsprechenden Flächeneinheit ausdrückt. Nennen wir die Grundseite eines Rechtecks AB, die Höhe AD, so bezeichnet man in der Raumlehre das Rechteck $ABCD$ durch das Produkt $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$. Der Inhalt des Quadrates wird bekanntlich erhalten, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst vervielfältigt. Ein Quadrat $ABCD$ wird daher in der Raumlehre durch das Produkt $\overline{AB} \cdot \overline{AB} = \overline{AB}^2$ ausgedrückt.

*) E. Schröder nennt in seinem „Lehrbuch der Arithmetik“ diese beiden aufgestellten Grundsätze „die erste und zweite Convention“. Beide sind nach Prof. Dr. Stoll, „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“, „früher zu wenig beachtet worden“. Auch in der „Aufgabensammlung“ und in den „Arithmetischen Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik“ von Dr. Bardey sind diese Grundsätze enthalten.

Jedes Strecken-Produkt aus zwei Faktoren $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ bedeutet in der Raumlehre eine Fläche, und zwar ein Rechteck, dessen anstoßende Seiten die Strecken AB und AD sind. Das Produkt aus den gleichnamigen Maßzahlen dieser Strecken stellt dagegen eine Zahl, eine Flächenzahl*) vor, welche eben so viele Einheiten darstellt, als das Rechteck Flächeneinheiten enthält. Wegen dieser Übereinstimmung des Produktes aus den Längenzahlen zweier Strecken mit der Zahl, welche die Flächeneinheiten des aus den Strecken gebildeten Rechtecks ausdrückt, kann ein Zahlenprodukt an Stelle eines Streckenproduktes und weiter das entsprechende Rechteck durch ein Zahlenprodukt ersetzt werden. Bezeichnet man die Maßzahlen für Länge und Breite des Rechtecks allgemein mit den Zahlenzeichen a und b, die Länge einer Quadratseite mit a, so drückt das Produkt ab ein Rechteck und das Produkt $a \cdot a = a^2$ ein Quadrat aus. Umgekehrt und konsequent dieser Beziehung und Bezeichnung kann ein Produkt aus zwei Zahlen als ein Rechteck und im besondern Falle, nämlich wenn beide Faktoren gleich sind, als die Raumgröße „Quadrat" aufgefaßt werden.

Wegen der vorhin dargelegten Beziehung zwischen dem Produkt aus den Maßzahlen für Länge und Breite (Höhe) eines Rechteckes und dieser Raumgröße selbst ist es klar, daß jede arithmetische Verwandlungsformel, deren Glieder nur aus zwei Faktoren bestehen, im geometrischen Sinne gedeutet werden kann.

Beispiele:

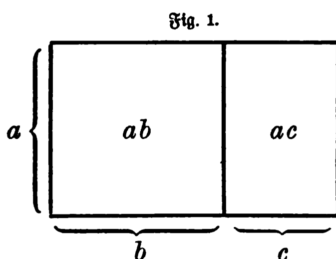
$$8 \times (54) = 8 \times (50 + 4) = 8 \times 50 + 8 \times 4$$
$$= 400 + 32 = 432.$$
$$5 \times 378 = 5 \cdot (300 + 70 + 8) = 1500 + 350 + 40.$$

*) Die Namen Flächen- und Körperzahlen (§ 14) sind pythagoreischen Ursprungs (d. h. sie stammen aus der Schule der Pythagoreer) und deuten die Versinnlichung durch Fläche und Körper an. Die Erklärung von Flächen- und Körperzahlen als Produkte der Maßzahlen der Ausdehnungen der entsprechenden Raumgebilde findet sich bei Euklid (VII, 16. und 17. Definition) und Theon von Smyrna.

I. Formel: $a \cdot (b + c) = ab + ac.$

Um diese Formel anschaulich und leicht zu beweisen, zeichnen wir ein Rechteck, dessen Grundseite gleich der Summe von $b + c$ Längeneinheiten und dessen Höhe gleich a Längeneinheiten ist. Zieht man nun aus dem Endpunkt der Strecke a die Parallele zur Höhenseite, so enthält das eine Rechteck offenbar ab und das andere ac Flächeneinheiten. Da beide Produkte den Inhalt des ganzen Rechtecks ausdrücken, so ist

Fig. 1.



$$a(b + c) = ab + ac.$$

1) **Lehrsatz:** Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Glied der Summe mit der Zahl multipliziert und die erhaltenen Teilprodukte addiert.

Da wir in jedem Rechteck Grundseite und Höhe miteinander vertauschen können, so ist auch $(b + c) \cdot a = ab + ac$ d. h. in Worten:

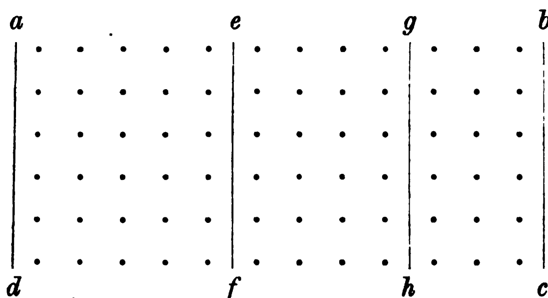
2) **Lehrsatz:** Eine Zahl a wird mit einer Summe $b + c$ multipliziert, indem man die Zahl mit jedem Summanden multipliziert und die entstandenen Produkte addiert.

3) **Lehrsatz:** Zerlegt man einen Faktor eines Produktes in eine Summe, multipliziert jedes Glied derselben mit dem andern Faktor und addiert die einzelnen Produkte, so ist deren Summe gleich dem ursprünglichen Produkt.

Es ist z. B.

$$12 \times 6 = (5 + 4 + 3)6 = 5 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 30 + 24 + 18.$$

Beweis. Nach dem Kommutationsgesetze kann das Produkt 12×6 dargestellt werden durch



In dieser Darstellung versinnlicht die wagrechte Reihe $ab = 12$ den ursprünglichen Multiplikator, $ad = 6$ den Multiplikanden und die in dem Felde $abcd$ enthaltenen Punkte stellen den Wert des ursprünglichen Produktes dar. Letzteres besteht aber aus den Feldern $adfe + efgh + ghbc$. Nun versinnlichen die senkrechten Reihen des ersten Feldes das Produkt $5 \cdot 6$, das zweite Feld veranschaulicht das Produkt $4 \cdot 6$ und das letzte Feld stellt das Produkt $3 \cdot 6$ vor. Da die Darstellung das ganze (ursprüngliche) Produkt versinnlicht, so ist

$$12 \times 6 = 5 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6.$$

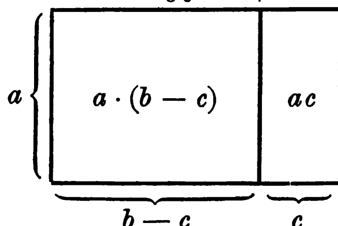
Beispiele:

$$4 \times 99 = 4 \cdot (100 - 1) = 4 \cdot 100 - 4 \cdot 1 = 396.$$
$$5 \times 348 = 5 \cdot (350 - 2) = 5 \cdot 350 - 5 \cdot 2 = 1740.$$

II. Formel: $a(b - c) = ab - ac.$

Beweis. Im nebenstehenden Rechteck versinnliche die Grundseite die Zahl b, ein Teil derselben veranschauliche den Subtrahenden c, so stellt der andere Abschnitt die Differenz $b - c$ vor. Das ganze Rechteck stellt das Produkt ab, das kleinere das Produkt ac dar, und das größere versinnlicht das Produkt $a(b - c)$. Da das erste Rechteck gleich der Differenz des ganzen Rechteckes und des kleineren ist, so ist

Fig. 2.



$$a(b - c) = ab - ac.$$

4) **Lehrsatz:** Eine Differenz wird mit einer Zahl multipliziert, indem man sowohl den Minuenden als den Subtrahenden mit der Zahl multipliziert und das letztere Produkt vom ersteren subtrahiert.

Durch Vertauschung von Grundseite und Höhe erhalten wir die Gleichung $(b-c) \cdot a = ab - ac$.

5) **Lehrsatz:** Eine Zahl a wird mit einer Differenz $b - c$ multipliziert, indem man vom Produkt aus der Zahl und dem Minuenden das Produkt aus der Zahl und dem Subtrahenden subtrahiert.

6) α) **Rechtecksatz:** Rechtecke von gleicher Grundseite und verschiedenen Höhen werden addiert oder subtrahiert, indem man die Grundseite unverändert läßt und die Höhen addiert oder subtrahiert.

Beweis. Die Richtigkeit der ersten geometrischen Wahrheit springt sofort in die Augen, wenn man die beiden Rechtecke

Fig. 3.

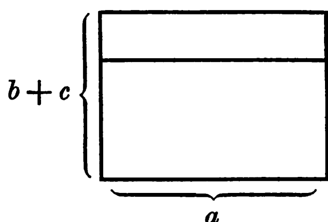
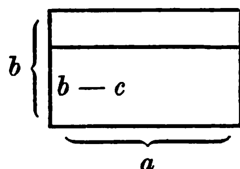


Fig. 4.



mit der gemeinsamen Grundseite aufeinander setzt. Man erhält dann ein Rechteck mit der Grundseite a und der Höhe $(b+c)$ (Fig. 3).

Man subtrahiert das Rechteck $a \cdot c$ von dem Rechteck ab, indem man die Höhe c auf der Höhe b des einen Rechtecks abträgt und durch den erhaltenen Endpunkt die Parallele zur Grundseite zieht. Schneidet man nun das Rechteck ac vom Rechteck ab ab, so bleibt ein Rechteck mit der Grundseite a und der Höhe $b - c$ übrig (Fig. 4). Es ist daher

III. Formel: $ab \pm ac = a(b \pm c)$.

Der entsprechende Lehrsatz aus der Zahlenlehre lautet:

β) **Arithmetischer Lehrsatz:** Produkte, die einen gleichen Faktor haben, werden addiert (subtrahiert), indem man die Summe (Differenz) der ungleichen Faktoren mit dem gleichen Faktor multipliziert.

Die Richtigkeit des letzteren Lehrsatzes ergiebt sich auch durch die Umkehrungen der Formeln I und II. — Die Vereinigung von Produkten mit gleichen Faktoren nennt man das Herausschreiben (Heraussetzen) des gemeinschaftlichen Faktors.

Anmerkung. Der Rechtecksatz 6α kann auch zweckmäßig in folgender Weise ausgesprochen werden:

Der Flächeninhalt mehrerer Rechtecke von gleicher Höhe und verschiedenen Grundseiten ist gleich einem einzigen Rechteck, das die Summe der Grundseiten als Grundseite und die gemeinschaftliche Höhe zur Höhe hat.

In der berechnenden Raumlehre bietet sich manchmal Gelegenheit, von diesem Lehrsatze nützliche Anwendung zu machen.

Bekanntlich findet man die Größe der Seitenflächen eines geraden Prismas, indem man jede einzelne Seitenfläche berechnet und deren Inhalte addiert. Man gelangt kürzer zum Ziele, wenn man auf Grundlage des vorstehenden Lehrsatzes die Regel benutzt: Umfang (des Prismas) mal Höhe.

Der Lehrsatz 6β ist offenbar auch dann gültig, wenn ein Faktor des Produktes ein Bruch*) ist, so ist z. B.

$$5 \cdot \tfrac{3}{4} + 7 \cdot \tfrac{3}{4} = 12 \cdot \tfrac{3}{4}.$$

Allgemein ist:

$$a \cdot \frac{b}{2} + a \cdot \frac{c}{2} = a \cdot \frac{b+c}{2}.$$

Deuten wir diese letztere analytische Formel geometrisch, indem wir die Produkte $a \cdot \frac{b}{2}$ und $a \cdot \frac{c}{2}$ wegen ihrer Ana-

*) Da hier von einem Bruche die Rede ist, so gehört das Folgende der Anmerkung eigentlich nicht in diesen Abschnitt. Nur der innern Verwandtschaft wegen haben wir das Folgende hier erörtert.

logie mit der Inhaltsformel des Dreiecks $J = g \cdot \frac{h}{2}$ als Zeichen für Dreiecke auffassen, so erhalten wir den Satz:

Die Inhalte mehrerer Dreiecke von gleicher Höhe und verschiedenen Grundseiten sind gleich einem einzigen Dreieck, dessen Grundseite die Summe jener Grundseiten ist und das dieselbe Höhe hat. Und man erhält den Gesamtinhalt mehrerer Dreiecke von gleicher Grundseite und verschiedenen Höhen, indem man die gemeinsame Grundseite mit der Summe der Höhen multipliziert.

Auch diese beiden Sätze können mit Vorteil in der Raumlehre benutzt werden. Der erste z. B. bei Entwickelung des Verfahrens zur Berechnung des Trapezes. Es seien die Maßzahlen der Parallelseiten eines Trapezes 9 m und 6 m und ihr Abstand betrage 5 m. Zerlegt man das Trapez durch eine Diagonale in Dreiecke und addiert deren Inhalte, so hat man:

$$J = 9 \times \tfrac{5}{2} + 6 \times \tfrac{5}{2}\cdot$$

Durch Anwendung des Lehrsatzes 6 β ergiebt sich sofort:

$$J = (9 + 6)\tfrac{5}{2} = 15 \cdot \tfrac{5}{2}$$

Flächeneinheiten.

Der zweite Lehrsatz kann bei Berechnung unregelmäßiger Vierecke (Vielecke) Anwendung finden. Teilt man ein unregelmäßiges Viereck durch eine Diagonale in Dreiecke und betrachtet die Diagonale als deren gemeinsame Grundseite, so hat man, letztere zur Kürze mit d und die Höhen der Dreiecke mit h_1 und h_2 bezeichnet:

$$J = d \times \frac{h_1}{2} + d \times \frac{h_2}{2} = \frac{d}{2} \times (h_1 + h_2).$$

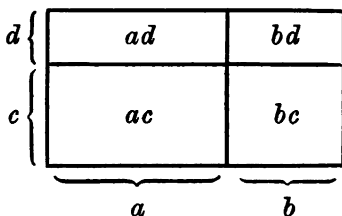
Beispiele (zum folgenden Lehrsatze):

$$24 \times 15 = (20 + 4)\cdot(10 + 5) = 20\cdot(10 + 5) + 4\cdot(10 + 5)$$
$$= 20 \cdot 10 + 20 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 5.$$

IV. Formel: $(a + b)\cdot(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$
$= ac + ad + bc + bd.$

Beweis. Faßt man die Summen $a+b$ und $c+d$ als Maßzahlen der Grundseite und Höhe eines Rechteckes auf, stellt letzteres dar, und zieht durch die Endpunkte der Strecken a und c Parallelen zu den Gegenseiten, so versinnlichen die entstandenen Rechtecke die Produkte ac, ad, bc und bd, welche zusammen das Produkt

Fig. 5.



$$(a+b)\cdot(c+d)$$

bilden.

7) **Lehrsatz:** Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern Summe multipliziert und die erhaltenen Teilprodukte addiert.

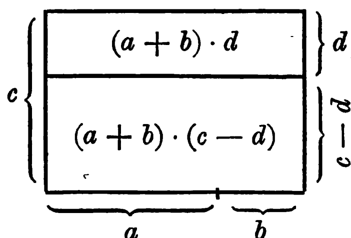
Beispiele:

$$(20+5)\cdot(30-2) = 20\cdot(30-2) + 5(30-2)$$
$$= (20\cdot 30 + 5\cdot 30) - (20\cdot 2 + 5\cdot 2).$$

V. Formel: $(a+b)\cdot(c-d) = a(c-d) + b(c-d)$
$= (ac+bc) - (ad+bd)$.

Beweis. Im nebenstehenden Rechteck versinnliche die Grundseite die Summe $a+b$ und die Höhe den Minuenden c der Differenz $(c-d)$. Trägt man auf c eine Strecke $= d$ Längeneinheiten ab und zieht durch den Endpunkt der Strecke d die Parallele zur Grundseite, so versinnlicht das untere Rechteck das Produkt $(a+b)\cdot(c-d)$ und das obere Rechteck veranschaulicht das Produkt $(a+b)\cdot d$. Da man das untere Rechteck erhält, wenn man das obere abschneidet, so ist $(a+b)\cdot(c-d)$

Fig. 6.



$= (a + b)c - (a + b)d$. Mit Anwendung der Formel I auf die rechte Seite dieser Gleichung findet man

$$(a + b) \cdot (c - d) = ac + bc - (ad + bd).$$

8) **Lehrsatz:** Eine Differenz wird mit einer Summe multipliziert, indem man von der Summe der Produkte aus jedem Summanden und dem Minuenden die Summe der Produkte aus dem Subtrahenden und jedem Summanden subtrahiert.

Da wir in obigem Rechteck Grundseite und Höhe vertauschen können, so ist $(c - d)(a + b) = ac + bc - (ad + bc)$. Diese Formel spricht einen Lehrsatz über Multiplikation einer Summe mit einer Differenz aus.

Beispiele:

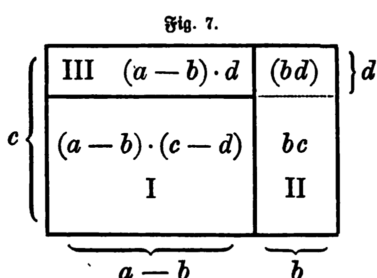
$$(48 - 2) \cdot (99 - 1) = 48 \cdot (99 - 1) - 2(99 - 1) \text{ nach Lehrsatz 4.}$$
$$= 48 \cdot 99 - 48 \cdot 1 - (2 \cdot 99 - 2 \cdot 1)$$
$$= 48 \cdot 99 + 2 \cdot 1 - (48 \cdot 1 + 99 \cdot 2) \text{ nach § 6,7.}$$

In allgemeinen Zahlen:

$$(a - b) \cdot (c - d) = a(c - d) - b(c - d)$$
$$= ac + bd - (ad + bc).$$

Beweis. Man bilde ein Rechteck, dessen Grundseite die Differenz $a - b$ und dessen Höhe die Differenz $c - d$ veranschaulicht (siehe nebenstehende Figur). Das ganze Rechteck stellt das Produkt ac dar, das mit II bezeichnete Rechteck versinnlicht das Produkt bc und Rechteck III veranschaulicht das Produkt $(a - b) \cdot d$. Man erhält nun offenbar das Rechteck I, wenn man von der ganzen Figur die mit II und III bezeichneten Rechtecke abtrennt, d. h.

Fig. 7.



$$(a - b) \cdot (c - d) = ae - (a - b)d - bc$$

oder, da $(a - b)d = ad - bd,$

VI. Formel: $(a - b) \cdot (c - d) = ac + bd - (ad + bc).$

9) **Lehrsatz:** Eine Differenz wird mit einer Differenz multipliziert, indem man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern Differenz multipliziert und von der Summe der Produkte aus den beiden Minuenden und aus den beiden Subtrahenden die Summe der Produkte aus je einem Minuenden und einem Subtrahenden subtrahiert.

Aus den Lehrsätzen 7, 8 und 9 ergiebt sich für das praktische Rechnen folgende

10) **Hauptregel:** Bestehen die Faktoren eines Produktes aus mehreren Teilen, mögen sie additiv oder subtraktiv mit einander verbunden sein, so muß man mit jedem einzelnen Teile des einen Faktors an allen Gliedern des andern die Multiplikation vollziehen und die erhaltenen Teilprodukte durch Addition zu einem Totalprodukte verbinden, da das Ganze stets seinen Teilen zusammengenommen gleich sein muß. Die Teilprodukte aus den Gliedern mit gleichen Vorzeichen werden additiv; dagegen sind die Produkte der Summanden mit ungleichen Vorzeichen subtraktiv.

IV. Division.

§ 10. Vorbereitung.

Nach § 7 ist der Sinn der Aufgabe $3 \cdot 4$ auf unsere graphische Abbildung der natürlichen Zahlenreihe übertragen: man soll vom Nullpunkt aus dreimal um eine Schrittlänge von vier Längen vorwärtsschreiten, wodurch man den mit 12 bezeichneten Punkt der Darstellung erhält. Im Anschluß hieran können wir uns umgekehrt die Frage vorlegen: wenn man vom Punkt 12 aus in drei gleichen Schritten an den Anfangspunkt gelangen will, wie groß muß man alsdann die Schrittlänge nehmen? Die Lösung dieser Aufgabe verlangt, daß wir die Strecke $\overline{0,12}$ in drei gleiche Teile zerlegen. Ein solcher

Teil umfaßt offenbar 4 Längen, d. h. die gesuchte Schrittlänge ist vier Strecken gleich.

Wir können aus obiger Multiplikationsaufgabe ferner die Aufgabe ableiten: wie oft muß man von dem die Zahl 12 versinnlichenden Punkt aus um einen Schritt gleich 4 Längen rückwärtsschreiten, um den Weg von 12 bis 0 zurückzulegen oder den Nullpunkt zu erreichen? Wir erhalten offenbar die Anzahl der gesuchten Schritte, indem wir die gegebene Schrittlänge auf die Strecke $\overline{12,0}$ so oft, als es angeht, abtragen, oder zählen, wie oft wir die erstere von der letzteren Strecke subtrahieren können. Dieses Verfahren heißt „Messen".

§ 11. Begriff der Division.

Die Gleichung $4 \cdot 6 = 24$ ist nach dem Begriffe der Multiplikation eine Abkürzung für $6 + 6 + 6 + 6 = 24$, welche sagt: die Zahl 24 ist eine Summe aus 4 Teilen, von welchen jeder gleich 6 ist. Wenn nun umgekehrt das Produkt 24 und die Anzahl der Teile (4) gegeben sind, so können wir nach der Größe eines Teiles fragen. Setzen wir die gesuchte Zahl gleich x, so muß $4 \cdot x = 24$ sein. Diese Aufgabe führt uns auf eine neue Rechnungsart, die Division.

Dividieren heißt zunächst aus dem Produkte zweier Zahlen und dem Multiplikator den Multiplikanden finden. — Bei der Aufgabe $6 + 6 + \cdots = 24$ kann man aber auch nach der Anzahl der gleichen Teile oder mit Beziehung auf die Gleichung $4 \cdot 6 = 24$ fragen: wie oft muß man den Multiplikanden 6 setzen, damit das wirkliche Produkt 24 herauskommt? Bezeichnen wir den gesuchten Multiplikator mit x, so muß offenbar $x \cdot 6 = 24$ sein. Die Lösung dieser Aufgabe führt uns ebenfalls auf die Division. In diesem Falle wird das Dividieren als Messen erklärt; es ist nämlich zu untersuchen, wie oft der Multiplikand 6 im Produkte 24 enthalten ist. Dividieren heißt daher auch, aus dem Produkte zweier Zahlen und dem Multiplikanden den Multiplikator ermitteln. Die Division umfaßt also zwei besondere Fälle, welche in die Operationen des Teilens und

des Messens oder Enthaltenseins unterschieden werden. Die Auffassung der Division als Messen ist in den Fällen unvermeidlich, wo die gegebenen Zahlen entweder gleich benannt sind oder doch auf gleiche Benennung gebracht werden können. Der Sinn der Aufgaben 20 ℳ : 4 ℳ oder 4 ℳ : 25 ₰ kann nur dieser sein: zu untersuchen, wie oft 4 ℳ (das Maß) in der zu messenden Größe 20 ℳ, 25 ₰ in 4 ℳ, stecken oder enthalten sind. (Vergleiche Nr. 4 der Grundgesetze.) Für das Ergebnis der Rechnung ist es einerlei, ob man die Division als Teilen oder als Messen auffaßt.

Aus Vorstehendem ergiebt sich offenbar, daß die Division nichts anderes als die Umkehrung der Multiplikation ist. Da nach dem Kommutationsgesetze der Multiplikation $a \cdot b = b \cdot a$ ist, so ist es bei unbenannten Zahlen einerlei, ob man den Multiplikator oder den Multiplikanden als die zu suchende Größe betrachtet. In diesem Falle kann also in den Gleichungen $b \cdot x = x \cdot b = a$ der unbekannte Faktor x durch eine Operation, das Teilen, ermittelt werden. Auch bei Aufgaben der Art 20 ℳ : 4 ℳ ist stets ein Faktor zu suchen, nämlich der Multiplikator. Die Division kann daher allgemein, d. h. so, daß sie die beiden Operationen des Teilens und des Messens einschließt, auf folgende Weise definiert werden: Dividieren heißt, aus dem Produkte zweier Zahlen und einem bekannten Faktor den unbekannten Faktor finden.

Formel I: $(a \cdot b) : b = a$.

Das gegebene Produkt a erhält nun den Namen Dividend, der bekannte Faktor b wird zum Divisor und der gesuchte Faktor, das Ergebnis der Division, heißt Quotient. Zur Bezeichnung der Division dient ein Doppelpunkt oder ein wagerechter Strich, Divisions- oder Bruchstrich genannt. Der Quotient der Gleichung $x \cdot 6 = 24$ wird durch $24 : 6$, der Gleichung $x \cdot b = a$ durch $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ (gelesen: „a dividiert durch b", oder kurz „a durch b") bezeichnet. Die Division „b in a" schreiben wir $b \div a$. Damit der Quotient $a : b$ eine

natürliche Zahl bezeichnet, muß a ein Vielfaches von b sein; im anderen Falle geht die Division nicht auf und es bleibt ein Rest.

Setzt man in der Gleichung $x \cdot b = a$ an Stelle von x den Wert $a : b$, so verwandelt sich dieselbe in die folgende

Formel II: $\frac{a}{b} \cdot b = a$.

Diese Definitionsformel lautet in Worten: Eine Zahl a durch eine zweite b dividieren heißt eine dritte Zahl $a : b$ finden, die mit der zweiten multipliziert die erstere zum Produkte giebt.

§ 12. **Grundgesetze der Division.**

1) Der Dividend muß gleich sein dem Produkt aus dem Quotienten und dem Divisor (Folgerung aus der Definitionsformel: $(a : b) \cdot b = a$). Bezeichnet man den Dividenden mit D, den Divisor mit d und den Quotienten mit Q, so haben wir die Grundformel:

$$D = Q \cdot d.$$

Man benutzt dieses Gesetz zur Berechnung der Unbekannten x in Gleichungen folgender Form: $\frac{x}{a} = b$; Lösung: $x = ab$. Gleichung: $\frac{x}{12} = 15$; Lösung: $x = 12 \cdot 15 = 180$.

Die Grundformel $D = Q \cdot d$ bietet ferner ein Mittel zur Prüfung der Richtigkeit einer ausgeführten Division.

Die Gleichung $(a : b) \cdot b$ läßt auch folgende Deutung zu: Eine Zahl a bleibt ungeändert, wenn man sie durch eine Zahl dividiert und mit derselben Zahl multipliziert.

Die erste Definitionsformel der Division $(a \cdot b) : b = a$ ist auch der Ausdruck des folgenden

2) Gesetzes: Dividiert man ein Produkt $a \cdot b$ durch einen seiner Faktoren, so erhält man den andern.

Mit Hilfe dieses Gesetzes kann man den unbekannten Faktor x eines Produktes finden, also die Unbekannte x in Gleichungen von der Form $a \cdot x = b$ bestimmen. Es ist nämlich $x = b : a$.

Folgerung: Eine Zahl a bleibt ungeändert, wenn man sie mit einer Zahl b multipliziert und durch dieselbe Zahl dividiert. Multiplikation und Division mit derselben Zahl an einer andern vollzogen heben sich gegenseitig auf; beide sind einander entgegengesetzte Rechnungsverfahren.

Aus der Gleichung $(a:b) \cdot b = a$ folgt nach dem zweiten Gesetze:

$$a:(a:b) = b$$

d. h. in Worten:

3) Dividiert man Dividenden durch den Quotienten, so erhält man den Divisor.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes ergiebt sich auch notwendig aus dem Kommutationsgesetze der Multiplikation, und dem Gesetze: Man kann Multiplikand und Multiplikator miteinander vertauschen, entspricht das Gesetz: In der Gleichung $a:b=c$ kann man Quotient und Divisor miteinander vertauschen. — Mit Anwendung des letzteren Gesetzes kann man den unbekannten Divisor x eines Quotienten in Gleichungen von der Form: $a:x=b$ berechnen. Lösung: $x = a:b$. Gleichung: $84:x=7$; Auflösung: $x = 84:7 = 12$.

Da nach dem dritten Grundgesetze der Multiplikation nur der Multiplikand eine benannte Zahl sein darf und in diesem Falle Produkt und Multiplikand gleiche Benennung haben, so kann die aus der Gleichung $4 \cdot 5$ ℳ $= 20$ ℳ hergeleitete Aufgabe der Division 20 ℳ : 5 ℳ nur diese Auffassung zulassen: wie oft muß man 5 ℳ als Summand setzen, damit die Summe 20 ℳ herauskommt, oder wie oftmal sind 5 ℳ in 20 ℳ enthalten? Bei Aufgaben dieser Art wird also nach dem Multiplikator gefragt und der Quotient muß stets eine unbenannte Zahl sein.

4) Sind Dividend und Divisor benannt, so müssen beide gleiche Benennung haben, bezw. gleichnamig gemacht werden können, und der Quotient ist immer eine reine Zahl.

Arten der Aufgaben. Die Division umfaßt folgende drei Arten von Aufgaben:

a) Dividend und Divisor sind unbenannt. Der Quotient ist ebenfalls eine reine Zahl. Beispiel: $20:5=4$.

b) Der Dividend ist benannt, der Divisor ist unbenannt. Beispiel: 15 ℳ : 3 = 5 ℳ. Der Quotient erhält die gleiche Benennung wie der Dividend.

c) Dividend und Divisor sind gleichbenannt. Der Quotient ist eine reine Zahl. Beispiel: 15 ℳ : 3 ℳ = 5.

5) Jede Zahl durch sich selbst geteilt giebt 1. — Jede Zahl durch 1 dividiert bleibt unverändert.

In Zeichen:

$$a:a=1;\quad a:1=a.$$

Denn nach dem ersten Grundgesetze ist $a\cdot 1=a$.

6) Gleiche Zahlen durch gleiche dividiert geben gleiche Quotienten.

Voraussetzung: $a=b$
$c=d$

Behauptung: $a:c=b:d$

Beweis. Dem Grundsatze der Arithmetik $a=a$ gemäß ist $a:c=a:c$. Nach der Voraussetzung kann man die Zahl a rechts vom Gleichheitszeichen durch b und c durch d ersetzen, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

7) Haben Quotienten mit demselben Divisor gleichen Wert, so sind auch ihre Dividenden einander gleich.

Aus $a:b=a':b$ folgt $a=a'$.

8) Haben Quotienten mit demselben Dividenden gleichen Wert, so sind auch ihre Divisoren einander gleich.

Wenn $a:b=a:b'$, so ist auch $b=b'$.

9) Aus $a\cdot b=a\cdot b'$ folgt $b=b'$. Wie lautet diese Formel in Worten?

Beispiele:

$$20:4=\frac{2\cdot 20}{2\cdot 4}=\frac{3\cdot 20}{3\cdot 4}=\frac{n\cdot 20}{n\cdot 4}=5;$$

$$\frac{x}{y}=\frac{x\cdot m}{y\cdot m}.$$

$$\frac{80}{20} = \frac{80:10}{20:10} = \frac{80:20}{20:20} = \frac{4}{1} = 4;$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x:m}{y:m}.$$

10) Gesetz der Wertbeständigkeit eines Quotienten: Der Wert eines Quotienten ändert sich nicht, wenn man seinen Dividenden und seinen Divisor mit derselben Zahl multipliziert oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

Formel: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a:m}{b:m}.$

Um diese Formel zu beweisen, multipliziere man beide Seiten der Gleichung mit dem Divisor $b \cdot m$, so entsteht:

$$\frac{a}{b} \cdot (b \cdot m) = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \cdot (b \cdot m)$$

oder

$$\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) \cdot m = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \cdot (b \cdot m)$$

$a \cdot m = a \cdot m$ nach dem ersten Grundgesetze der Division. Aus dieser identischen Gleichung schließen wir auf die Richtigkeit der ursprünglichen. Die Richtigkeit des zweiten Teiles des vorstehenden Lehrsatzes ergiebt sich ohne weiteres, wenn man die Formel $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$ rückwärts liest.

Auf diesen Lehrsatz gründet sich das Erweitern, das Gleichnamigmachen und das Heben der Quotienten und Brüche. Auch das Dividieren durch Quotienten (Brüche) und durch Dezimalen kann durch Benutzung dieses Gesetzes begründet werden.

§ 13. Gesetze über Zahlverbindungen der ersten und zweiten Stufe.

Beispiele:

$$88:8 = (80+8):8 = \frac{80}{8} + \frac{8}{8}; \quad 96:4 = \frac{80+16}{4} = \frac{80}{4} + \frac{16}{4}.$$

$$848:4 = (800+40+8):8 = \frac{800}{8} + \frac{40}{8} + \frac{8}{8}.$$

$$(x+y+z):m = \frac{x}{m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{m}.$$

1) **Lehrsatz:** Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch die Zahl dividiert und die erhaltenen Quotienten addiert.

In Zeichen: $(a+b+c):d = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$.

Beweis für die Richtigkeit dieser Formel. Hier ist $D = a + b + c$, der Divisor gleich d und $Q = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$. Die Gleichung ist richtig, wenn $\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right) \cdot d = a + b + c$ ist. Auf der linken Seite dieser Gleichung ist eine Summe mit einer Zahl d zu multiplizieren. Nach § 9, 1 erhält man:

$$\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right) \cdot d = \frac{a}{d} \cdot d + \frac{b}{d} \cdot d + \frac{c}{d} \cdot d.$$

Auf die Ausdrücke der rechten Seite wenden wir das erste Grundgesetz an, nämlich: Multipliziert man einen Quotienten mit seinem Divisor, so erhält man den Zähler. Es ist daher

$$\frac{a}{d} \cdot d = a; \quad \frac{b}{d} \cdot d = b; \quad \frac{c}{d} \cdot d = c$$

und mithin

$$\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right) \cdot d = a + b + c.$$

Von vorstehendem Lehrsatze macht man nicht nur beim Kopfrechnen, sondern auch beim schriftlichen Teilen mehrstelliger Zahlen Anwendung, z. B.

$$\begin{aligned} 48\,672 : 6 &= (48\,000 + 600 + 72) : 6 \\ &= 8000 + 100 + 10 + 2 = 8112. \end{aligned}$$

Vertauscht man in der Formel zum ersten Lehrsatze beide Seiten mit einander, so heißt sie

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{d}$$

d. h. in Worten:

2) **Lehrsatz:** Quotienten mit gemeinschaftlichem Divisor werden addiert, indem man die Summe der Dividenden durch den Divisor dividiert.

Beispiele:

$$596 : 4 = (600 - 4) : 4 = \frac{600}{4} - \frac{4}{4} = 150 - 1 = 149.$$

$$792 : 8 = (800 - 8) : 8 = \frac{800}{8} - \frac{8}{1} = 100 - 1 = 99.$$

$$(m - n) : p = \frac{m}{p} - \frac{n}{p}.$$

3) **Lehrsatz:** Eine Differenz wird durch eine Zahl dividiert, indem man sowohl den Minuenden als den Subtrahenden durch die Zahl dividiert und den letzteren Quotienten vom ersteren subtrahiert.

Formel: $(a - b) : c = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$

Beweis. Nach der Formel $Q \cdot d = D$ muß hier

$$\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) \cdot c = a - b$$

sein. Nun ist nach § 9, 4:

$$\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) \cdot c = \frac{a}{c} \cdot c + \frac{b}{c} \cdot c.$$

Wendet man auf die Ausdrücke der rechten Seite dieser Gleichung nochmals die Formel $Q \cdot d = D$ an, so erhält man die Differenz $a - b$.

Durch Umkehrung vorstehender Formel ergiebt sich folgender

4) **Lehrsatz:** Gleichnamige Quotienten werden subtrahiert, indem man die Differenz der Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividiert.

Beispiele:

$$(65 \cdot 325) : 13 = \frac{65}{13} \cdot 325 = 5 \cdot 325.$$

$$(64 \cdot 256) : 16 = \frac{64}{16} \cdot 256 = 4 \cdot 256$$

$$= 64 \cdot \frac{256}{16} = 64 \cdot 16.$$

$$(p \cdot q) : m = \frac{p}{m} \cdot q = p \cdot \frac{q}{m}.$$

5) **Lehrsatz:** Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man nur einen Faktor durch die Zahl dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Faktor multipliziert.

$$\text{Formel:}\quad (a \cdot b) : c = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}.$$

Beweis. Die Formel ist richtig, wenn $Q \cdot d = D$, also wenn sowohl $\left(\frac{a}{c} \cdot b\right) \cdot c$ als auch $\left(a \cdot \frac{b}{c}\right) \cdot c$ gleich $a \cdot b$ ist. Nun ist nach dem Kommutationsgesetze der Multiplikation

$$\left(\frac{a}{c} \cdot b\right) \cdot c = \left(\frac{a}{c} \cdot c\right) \cdot b$$

und

$$\left(a \cdot \frac{b}{c}\right) \cdot c = a \cdot \left(\frac{b}{c} \cdot c\right).$$

Ferner ist $\frac{a}{c} \cdot c = a$, daher $\left(\frac{a}{c} \cdot c\right) \cdot b = a \cdot b$ und $a \cdot \left(\frac{b}{c} \cdot c\right) = a \cdot b$.

Durch Umkehrung vorstehender Formel ergiebt sich der

6) **Lehrsatz:** Ein Quotient $\frac{b}{c}$ wird mit einer Zahl a multipliziert, indem man das Produkt aus der Zahl und dem Dividenden durch den Divisor dividiert.

$$\text{Beispiel:}\quad \frac{300}{25} : 5 = \frac{300 : 5}{25} = \frac{300}{25 \cdot 5}.$$

7) **Lehrsatz:** Ein Quotient wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Dividenden durch die Zahl dividiert und den Divisor beibehält, oder indem man den Dividenden durch das Produkt aus dem Divisor und der Zahl dividiert.

$$\text{Formel:}\quad \frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{b \cdot c}.$$

Beweis des ersten Teils: $\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}$.

Nach dem Grundgesetze $Q \cdot d = D$ muß hier $\frac{a : c}{b} \cdot c = a : b$ sein.

Nun ist nach dem vorigen Lehrsatze $\frac{a : c}{b} \cdot c = \frac{(a : c) \cdot c}{b}$, wofür man kürzer den Quotienten $a : b$ setzen kann.

Beweis des zweiten Teils: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$.

Diese Formel ist richtig, wenn $\frac{a}{b \cdot c} \cdot c = \frac{a}{b}$ ist. Nach dem vorigen Lehrsatze ist $\frac{a}{b \cdot c} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ und dieser Quotient hat nach § 12, 10 den Wert $a : b$.

Durch Umkehrung der vorigen Formel ergiebt sich der folgende

8) **Lehrsatz:** Eine Zahl a wird durch ein Produkt $b \cdot c$ dividiert, indem man sie erst durch einen Faktor und den erhaltenen Quotienten durch den andern Faktor dividiert.

Von diesem Gesetze kann man Gebrauch machen, wenn eine Summe durch eine Zahl dividiert werden soll, die sich in Faktoren zerlegen läßt; so ist z. B. $986\,760 : 72 = 986\,760 : 8 \cdot 9$; $986\,760 : 9 = 109\,640$; $109\,640 : 8 = 13\,705$.

Beispiel: $64 : \frac{16}{2} = (64 : 16) \cdot 2 = \frac{64 \cdot 2}{16}$.

9) **Lehrsatz:** Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividiert, indem man den Quotienten aus der Zahl und dem Dividenden mit dem Divisor multipliziert, oder indem man die Zahl mit dem umgekehrten Wert des Quotienten multipliziert.

Formel: $a : \frac{b}{c} = (a : b) \cdot c = \frac{ac}{b} = a \cdot \frac{c}{b}$.

Beweis, daß $a : \frac{b}{c} = (a : b) \cdot c$ ist. Diese Gleichung ist richtig, wenn gemäß der Formel $Q \cdot d = D$ das Produkt aus $(a : b) \cdot c$ und $\frac{b}{c}$ den Dividenden a giebt. Nun ist $(a : b) \cdot c \cdot \frac{b}{c}$ $= (a : b) \cdot \left(c \cdot \frac{b}{c}\right)$ nach dem Associationsgesetz der Multiplikation $= (a : b) \cdot b = a$ nach § 12, 1. — Um zu zeigen, daß $a : \frac{b}{c}$ $= a \cdot \frac{c}{b}$ ist, verwandele man beide Seiten dieser Gleichung in identische Ausdrücke. Multipliziert man beiderseits mit b, so entsteht

$$a : \frac{b}{c} \cdot b = a \cdot \frac{c}{b} \cdot b.$$

$$\frac{a}{b} \cdot c \cdot b = a \cdot \frac{c}{b} \cdot b \text{ nach dem 1. Teile der Formel.}$$

$$\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) \cdot c = a \cdot \left(\frac{c}{b} \cdot b\right) \cdot$$

$$ac = ac.$$

Aus dieser identischen Gleichung schließen wir, daß auch die ursprüngliche Gleichung richtig ist.

Die Umkehrung des ersten Teils der vorstehenden Formel lautet: $(a : b) \cdot c = a : \frac{b}{c}$ d. h. in Worten:

10) **Lehrsatz:** Ein Quotient $a:b$ wird mit einer Zahl c multipliziert, indem man den Divisor b durch die Zahl dividiert und den Dividenden a beibehält.

Beispiel: $\frac{18}{3} \cdot \frac{24}{12} = \frac{18 \cdot 24}{3 \cdot 12}$.

11) **Lehrsatz:** Zwei Quotienten werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Dividenden durch das Produkt der Divisoren dividiert.

Formel: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Beweis. $a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d}$. Dieses Ergebnis ist noch durch b zu dividieren. Ein Quotient wird aber durch eine Zahl dividiert, indem man den Divisor mit der Zahl multipliziert, daher ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Beispiel: $\frac{50}{8} : \frac{6}{3} = \left(\frac{50}{8} : 6\right) \cdot 3 = \frac{50 \cdot 3}{8 \cdot 6} = \frac{50}{8} \cdot \frac{3}{6}$.

12) **Lehrsatz:** Ein Quotient wird durch einen Quotienten dividiert, indem man den ersteren mit dem umgekehrten Werte des zweiten (Divisors) multipliziert.

Formel: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Beweis. Nach dem Grundgesetze $Q \cdot d = D$ ist

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b};$$

denn jeder Quotient mit seinem umgekehrten Wert multipliziert liefert 1.

C. Rechnungsarten dritter Stufe.

V. Potenzen mit ganzen natürlichen Zahlen.

1) Potenzierung natürlicher Zahlen.

§ 14. Begriff der Potenzierung natürlicher Zahlen.

Wie die Geometrie lehrt, findet man die Zahl, welche die Flächeneinheiten eines Quadrates angiebt, indem man die Maßzahl einer Seite derselben mit sich selbst multipliziert, oder wie man zu sagen pflegt, die Maßzahl ins Quadrat erhebt. Beträgt z. B. die Seitenlänge eines Quadrates 24 Längeneinheiten, etwa cm, so ist der Flächeninhalt desselben $24 \cdot 24 = 576$ Flächeneinheiten (qcm). Die Ausdrücke, „eine Zahl ins Quadrat erheben, quadrieren", oder „das Quadrat einer Zahl" sind aus der Geometrie in die Arithmetik eingeführt worden. Man nennt daher allgemein alle Zahlen, welche durch Multiplikation mit sich selbst entstehen, Quadratzahlen. — Nach den Lehren der Stereometrie erhält man die Zahl, welche die Raumeinheiten eines Würfels bezeichnet, indem man die Maßzahl seiner Kante zweimal mit sich selbst multipliziert. Der Körperinhalt eines Würfels von 10 cm Kantenlänge ist z. B. $10 \times 10 \times 10 = 1000$ Körpereinheiten (cbcm). Aus diesem Grunde spricht man in der Arithmetik vom „Kubus einer Zahl", von „Würfel- und Kubikzahlen" und versteht darunter alle Zahlen, welche auf dieselbe Weise wie in der Geometrie bei Berechnung des Würfelinhaltes, nämlich durch ein Produkt aus (nur) drei gleichen Faktoren entstehen.

Während nun in der Raumlehre wegen der Thatsache, daß der Raum nur drei Ausdehnungen hat, die Kubikzahlen die Grenze bilden, setzt die Arithmetik die Bildung von Zahlen dieser Art in derselben Weise fort. Sie bildet z. B.

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000; \quad 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125.$$

Besteht ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren, so kann man die Aufgabe kürzer darstellen. Man sieht zu, wie oft der gleiche Faktor in dem Produkte vorkommt und setzt diese Zahl oben rechts neben den gleichen Faktor. So schreibt man

z. B. das Produkt 10 · 10 · 10 · 10 kurz 10^4 und statt $a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a$ (n-mal) kurz a^n (gelesen: „a hoch n" oder „a zur $n$ten Potenz"). Und umgekehrt bedeutet der Ausdruck 15^3 das Produkt 15 · 15 · 15; allgemein ist $x^y = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdots\cdots x$ (y-mal). Jedes Produkt aus lauter gleichen Faktoren heißt in der Arithmetik „Potenz". Da $a \cdot a \cdot a = a^3$, so ist sowohl das Produkt $a \cdot a \cdot a$ als das Zeichen a^3 eine Potenz. Der gleiche Faktor erhält den Namen Grundzahl (Basis, Dignand), und die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Grundzahl als Faktor gesetzt werden soll, heißt Gradanzeiger oder Exponent. Potenzen mit gleichen Exponenten nennen wir gleichartige Potenzen, z. B. 5^2 und 8^2. Die zweite Potenz einer Zahl wird (wie vorhin bereits gesagt wurde) aus geometrischen Gründen insbesondere Quadrat, die dritte Potenz Kubus genannt. Die vierte Potenz einer Zahl a^4 führt auch den Namen „Biquadrat". Unter der ersten Potenz einer Zahl versteht man die Zahl selbst, so daß $a^1 = a$ ist.

Die einer Potenz entsprechende Rechenoperation heißt potenzieren. Eine Zahl a mit einer andern n potenzieren oder dieselbe zur $n$ten Potenz erheben heißt, ein Produkt aus n Faktoren bilden, von denen jeder gleich a ist. Sind Grundzahl und Exponent bestimmte Zahlen, so bezeichnet die durch das Potenzieren erhaltene Zahl den wirklichen Potenzwert. So ist z. B. der wirkliche Potenzwert des Ausdruckes 10^3 die Zahl 1000.

§ 15. Grundgesetze der Potenzierung.

1) Grundzahl, Potenzexponent und Potenz können nur unbenannte Zahlen sein.

Denn nach einem Grundgesetze der Multiplikation, von welcher die Potenzierung ein besonderer Fall ist, kann nur ein Faktor eines Produktes und zwar der Multiplikand eine benannte Zahl sein; Aufgaben wie 6 ℳ · 6 ℳ sind aber widersinnig.

2) Gleiche Zahlen, mit demselben Exponenten potenziert, liefern gleiche Potenzwerte.

Ist z. B. $x = 8$, so ist $x^2 = 64$; wenn allgemein $a = b$, so muß $a^m = b^m$ sein.

3) Grundzahl und Exponent dürfen im allgemeinen nicht vertauscht werden. (Ausnahme $2^4 = 4^2$.)

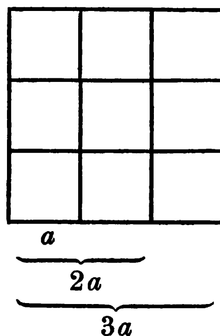
4) Eins mit jeder Zahl potenziert, giebt Eins.

Formel: $1^m = 1$.

§ 16. Lehrsätze über Potenzierung von Summen und Differenzen.

Die Lehrsätze über das Potenzieren von Summen und Differenzen sind wegen ihrer häufigen Anwendung besonders wichtig. Hierbei findet durchgängig eine innige Beziehung der Ähnlichkeit zwischen Arithmetik und Geometrie statt.

Fig. 8.



1α) **Rechtecksatz:** Das Quadrat über einer 2, 3, 4, 5 ..... $n$mal so großen Strecke ist 4, 9, 16, 25 ..... n^2mal so groß als das Quadrat der einfachen Strecke.

Bezeichnen wir die Längeneinheiten (Maßzahlen) einer Strecke mit a, so ist $(2a)^2 = 4a^2$; $(3a)^2 = 9a^2$; $(4a)^2 = 16a^2$ u. s. w.

Die Richtigkeit dieses Lehrsatzes folgt unmittelbar aus nebenstehender Figur.

1β) **Arithmetischer Lehrsatz:** Ein Produkt wird ins Quadrat erhoben (potenziert), indem man jeden Faktor quadriert (potenziert).

In Zeichen: $(m \cdot a)^2 = m^2 \cdot a^2$.

Anmerkung. Alle erfahrenen Lehrer der Arithmetik wissen, daß Anfänger häufig gegen vorstehende arithmetische Regel verstoßen, indem die Schüler sprechen und schreiben: $(2a)^2 = 2a^2$. Wir halten es hier für angezeigt, dem Lernenden (namentlich den schwächeren Schülern) zuerst die Wahrheit im geometrischen Gewande zu geben. Das geometrische Gebilde zeigt dem Lernenden anschaulich, daß das Quadrat

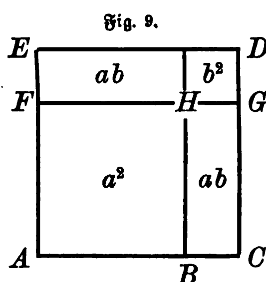
über einer 2, 3, 4, 5 ..... n mal so großen Strecke 4, 9 .... n^2 mal so groß ist als das Quadrat über der einfachen Strecke. Diese Anschauung kommt der abstrakten arithmetischen Regel sehr zu Hilfe, unterstützt die Auffassung und Einprägung derselben wesentlich. Hat der Schüler die geometrische Wahrheit am Raumgebilde aufgefaßt, so erübrigt nur noch, dieselbe in die Sprache der Arithmetik zu übertragen und schließlich das entsprechende arithmetische Gesetz allgemein zu gewinnen.

2α) **Rechtecksatz:** Das Quadrat über der Summe zweier Strecken ist gleich der Summe der Quadrate über jeder einzelnen Strecke nebst dem doppelten Rechteck gebildet aus beiden Strecken.

In Zeichen: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Der Beweis für diesen Rechtecksatz ergiebt sich durch unmittelbare Anschauung, wenn man über der Summe zweier Strecken $AB = a$ und $BC = b$ das Quadrat zeichnet, $AF = AB$ macht und durch B und F die Parallelen BJ und FG zu den entsprechenden Quadratseiten zieht.

Fig. 9.



Deuten wir diese bewiesene Formel im Sinne der Arithmetik, d. h. betrachten wir a und b als abstrakte Zahlen, so erhalten wir den

2β) **Arithmetischen Lehrsatz:** Das Quadrat der Summe zweier Zahlen besteht aus dem Quadrate der ersten Zahl, dem doppelten Produkt aus beiden Zahlen und dem Quadrate der zweiten Zahl.

Beispiele:

$$32^2 = (30 + 2)^2 = 30^2 + 2 \cdot (30 \cdot 2) + 2^2$$
$$= 900 + 120 + 4 = 1024.$$
$$51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \cdot (50 \cdot 1) + 1^2$$
$$= 2500 + 100 + 1 = 2601.$$

Anmerkung 1. Der didaktische Wert, der in der Verknüpfung dieser beiden Lehrsätze der Mathematik liegt, scheint,

nach einer Anzahl Lehrbücher zu schließen, fast allgemein anerkannt und benutzt zu sein.

Der arithmetische Lehrsatz 2β dient bekanntlich als Wegweiser oder Richtschnur für das Ausziehen der Quadratwurzel. In allen uns bekannten Lehrbüchern wird dieser Lehrsatz zuerst an abstrakten Zahlen entwickelt und schließlich durch geometrische Darstellung veranschaulicht.

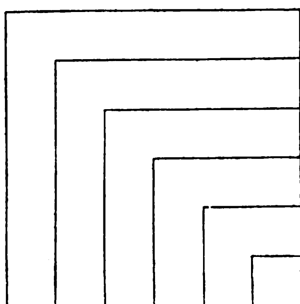
Es erscheint uns naturgemäß und daher richtiger zu sein, von der räumlichen Darstellung auszugehen und die gewonnene geometrische Wahrheit in die arithmetische Sprache zu kleiden. Man gebe dem Schüler das sinnlich Wahrnehmbare vor dem Abstrakten, das Bekannte vor dem Unbekannten! Wir setzen selbstredend voraus, daß der Lernende die einfachen Raumgebilde Quadrat und Rechteck kennt, wenn obiges Gesetz entwickelt werden soll. Geht man von der räumlichen Darstellung aus, so gewinnt der Schüler die Wahrheiten durch unmittelbare Anschauung, die abstrakten Produkte des arithmetischen Beispieles oder der Formel sind hier durch wirkliche Gegenstände vertreten. Wird nun die Entwickelung des arithmetischen Lehrsatzes an die gewonnene geometrische Wahrheit angeschlossen, so wird die Auffassung des ersteren keine Schwierigkeit haben; beide Lehrsätze unterstützen sich gegenseitig, die eine Wahrheit verknüpft sich mit der anderen, was zur sicheren Einprägung beider wesentlich beiträgt.

Anmerkung 2. Die Fläche $BCDEFH$ (Figur 9) ergänzt das Quadrat über der Strecke a zu dem Quadrate über der Summe $a + b$. Nach Heron von Alexandria heißt erstere Fläche ein Gnomon. Dieser alte Mathematiker sagt: „Alles, was zu einer Figur oder Zahl hinzugefügt, das Ganze dem ähnlich macht, zu welchem hinzugefügt worden war, nennt man Gnomon.“ Diese Erklärung knüpft an eine ältere an, welche bereits Aristoteles (384—322 v. Chr.) in folgender Weise gegeben hat: „Legt man einen Gnomon um ein Quadrat herum, so wird zwar die Größe, nicht aber die Art der Figur geändert.“ Nach einem Bericht von Aristoteles haben

die Pythagoreer die Quadratzahlen gebildet, indem sie die Gnomonen allmählich zur Einheit hinzufügten, und diese Entstehung der Quadratzahlen auf folgende Weise versinnlicht.

Es möge Figur 10 die geteilte Strecke, die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 versinnlichen. Beschreibt man nun über den die einzelnen Zahlen zur Anschauung bringenden Strecken Quadrate, so stellen diese die Quadrate der entsprechenden Zahlen bildlich dar. Wie die Figur zeigt, geht das Quadrat über 2 Längeneinheiten aus dem Quadrat über der Strecke eins hervor, indem zu letzterem ein Gnomon hinzukommt. Das dritte Quadrat entsteht aus dem zweiten, wiederum durch Hinzufügung eines Gnomons u. s. w. Nun versinnlicht der erste Gnomon offenbar die Zahl, welche zu 1 hinzugelegt, die Quadratzahl 4 liefert, also die Zahl 3. Der zweite Gnomon veranschaulicht die Zahl 5, der dritte die Zahl 7 u. s. f. Die Pythagoreer haben also die Quadratzahlen gebildet, indem sie zur 1 die ungeraden Zahlen 3, 5, 7 u. s. w. hinzulegten. „Sie haben die Summierung der Reihe $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots$ $\cdots + 2n - 1 = n^2$ vollzogen, haben dieses Verfahren mit klarer Einsicht in den darin zutage tretenden Gedanken ausgeübt." Allgemein entsteht das Quadrat über der Strecke von $n + 1$ Längeneinheiten aus dem Quadrat, dessen Seite n Längeneinheiten enthält, indem man letzterm einen Gnomon hinzufügt, welches aus einem Quadrate von der Länge 1 und aus zwei Rechtecken von den Seiten n und 1 zusammengesetzt ist (Lehrsatz 2α). Der Gnomon hat einen Inhalt von $2n + 1$ Flächeneinheiten, welche die n^2 Flächeneinheiten des ursprünglichen Quadrates zu dem neuen Quadrate von $(n + 1)^2$ Flächeneinheiten ergänzen. Da nun der Ausdruck $2n + 1$ stets eine ungerade Zahl bezeichnet, so ist es leicht begreiflich,

Fig. 10.



weshalb die Alten die ungeraden Zahlen auch „Gnomonzahlen" nannten. Das vorhin angegebene Gesetz über die Erzeugung eines Quadrates von $(n+1)^2$ Flächeneinheiten aus einem Quadrat von n^2 Flächeneinheiten lautet in arithmetischem Sinne: Aus der Quadratzahl n^2 entsteht die nächstfolgende $(n+1)^2$, wenn man ihr die Gnomonzahl $2n+1$ hinzufügt.

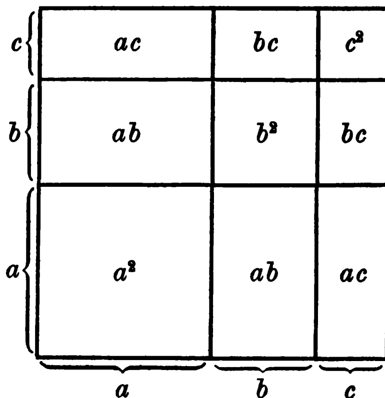
3α) **Rechtecksatz:** Das Quadrat über der Summe dreier Strecken ist gleich der Summe der Quadrate über denselben nebst den doppelten Rechtecken aus je zwei Strecken.

In Zeichen:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

Beweis. Man zeichne eine Strecke gleich der Summe der Strecken a, b und c und beschreibe zunächst über $a+b$ das Quadrat, welches nach Lehrsatz 2α aus den Quadraten über den Strecken a und b und dem doppelten Rechteck aus diesen Strecken besteht. Errichtet man nun das Quadrat über der ganzen Strecke $a+b+c=S$ und verlängert die vorhin gezogenen Parallelen, bis sie die Seiten des Quadrates über S treffen, so kommen als neue Bestandteile hinzu:

Fig. 11.



1) Das Quadrat über der Strecke c, also c^2;
2) zwei Rechtecke aus den Strecken a und c, also $2 \cdot ac$ und zwei Rechtecke aus den Strecken b und c, also $2 \cdot bc$.

Durch Zusammenfassung sämtlicher Bestandteile des Quadrates über S ergiebt sich

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc).$$

3β) **Arithmetischer Lehrsatz:** Das Quadrat der Summe von drei Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate dieser Zahlen und den doppelten Produkten aus je zwei Zahlen.

Tritt zur Summe der Strecken a, b und c noch eine vierte d hinzu, und bildet man über der neuen Summe S das Quadrat, so kommen als Ergänzung zu den vorhin entwickelten Bestandteilen noch das Quadrat über d und zwei Rechtecke von der Länge $a + b + c$ und der Länge d hinzu, d. h. es ist:

$$(a + b + c + d)^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + bc + ad + bd + cd).$$

Das Quadrat des Binoms $a + b$ kann als Richtschnur für die Bildung der Quadrate aller durch $+$ verbundenen mehrgliedrigen Ausdrücke sein. Wie die Betrachtung der Figur zu Rechtecksatz 3α anschaulich zeigt und sich durch die Vergleichung der Formeln:

(1) $$a^2 = a^2$$

(2) $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(3) $$(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$$

(4) $$(a + b + c + d)^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2$$

ergiebt, ist für das Quadrieren mehrgliedriger Ausdrücke folgendes Gesetz allgemein gültig: Wird eine Zahl um eine andere vermehrt, so wächst das entsprechende Quadrat um das doppelte Produkt aus der ursprünglichen und der neuen Zahl und das Quadrat der addierten Zahl. — Um die Gleichung (3) aus (2), Gleichung (4) aus (3) u. s. f. abzuleiten, kann man auch für die Summe mit Ausschluß des letzten Gliedes ein neues Zeichen a_1 einführen, den neuen Ausdruck quadrieren und hierauf für die Hilfsgröße den ursprünglichen Wert einsetzen, z. B.:

$$(a + b + c)^2 = (a_1 + c)^2 = a_1^2 + 2a_1c + c^2 \quad \text{nach (1).}$$

Setzt man nun statt a_1 die Summe $a + b$, so entsteht:

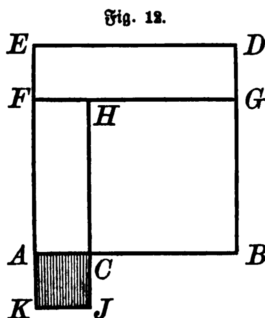
$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2.$$

4α) **Rechtecksatz:** Das Quadrat über der Differenz zweier Strecken ist gleich der Summe der Quadrate

über denselben, vermindert um das doppelte Rechteck gebildet aus beiden Strecken.

Beweis. Die größere der beiden Strecken sei $AB = a$, die kleinere $AC = b$. Trägt man letztere von A aus auf AB ab, so stellt CB die Differenz $a - b$ beider Strecken vor. Nun zeichne man über $AB = a$ das Quadrat $ABDE = a^2$ und über der Strecke $AC = b$ das Quadrat $ACJK = b^2$ nach unten. Macht man $BG = CB$, zieht durch Punkt G die Parallele GF zu AB und verlängert JC bis zum Schnittpunkt H mit FG, so entsteht das Quadrat über dem Strecken-Unterschiede, nämlich $CBGH = (a - b)^2$. Die Rechtecke $FGDE$ und $FKJH$ sind wegen Gleichheit der Grundseiten und Höhen inhaltsgleich; jedes Rechteck kann durch ds Produkt ab ausgedrückt werden. Die ganze Figur besteht aus $\overline{AB}^2 = a^2$ und $\overline{AC}^2 = b^2$. Zieht man von der ganzen Figur die genannten Rechtecke ab, so bleibt offenbar das Quadrat über BC übrig. Mithin ist:

Fig. 12.



$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Zahlenbeispiele:

$$\begin{aligned} 19^2 = (20 - 1)^2 &= (20 - 1) \cdot (20 - 1) \\ &= 20^2 - 20 \cdot 1 \\ &\quad - 20 \cdot 1 + 1^2 \\ \hline &= 20^2 - 2 \cdot (20 \cdot 1) + 1^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 47^2 = (50 - 3)^2 &= (50 - 3) \cdot (50 - 3) \\ &= 50^2 - 3 \cdot 50 \\ &\quad - 3 \cdot 50 + 3^2 \\ \hline &= 50^2 - 2 \cdot (50 \cdot 3) + 3^2. \end{aligned}$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

4β) **Arithmetischer Lehrsatz:** Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate beider Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt aus denselben.

Aus vorstehender Darstellung folgt auch:

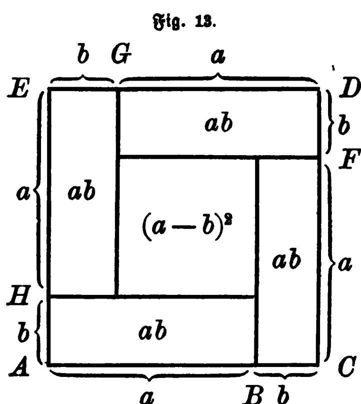
$$(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

5α) **Rechtecksatz:** Das Quadrat über der Summe zweier Strecken läßt sich zerlegen in das Quadrat über der Differenz beider Strecken und vier Rechtecke aus denselben.

In Zeichen: $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab.$

Beweis. In nebenstehender Figur sei die Strecke $AB = a$, $BC = b$ und AC stelle die Summe von $a + b$ dar. Über AC beschreibe man das Quadrat $ACDE$ und trage auf jeder der drei übrigen Seiten von den Ecken C, D und E aus die Strecke a ab, also:

Fig. 13.



$$AB = CF = DG = EH.$$

Errichtet man in den Punkten B, F, G und H die Senkrechten auf den entsprechenden Quadratseiten, und verlängert diese Senkrechten bis sie sich schneiden, so entstehen fünf rechtwinkelige Parallelogramme. Die an den Ecken des Quadrates liegenden vier Rechtecke sind sämtlich aus gleichen Strecken, nämlich a und b gebildet, und können daher durch $4ab$ bezeichnet werden. Die Figur in der Mitte ist ein Quadrat, dessen Seitenlänge $a - b$ beträgt. Da das Quadrat über $a + b$ aus diesen fünf Teilen besteht, so ist offenbar:

$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab.$ Beweis vom Inder Bhâskara.

5β) **Arithmetischer Lehrsatz:** Das Quadrat der Summe

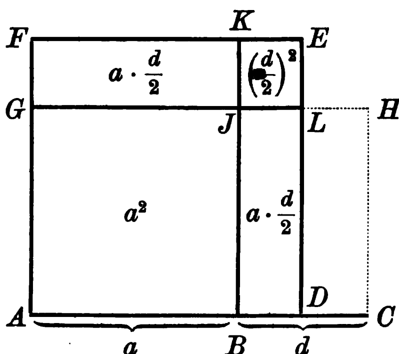
zweier Zahlen ist dem Quadrat ihrer Differenz und dem vierfachen Produkt beider Zahlen gleich.

Aus der Figur ist ferner ersichtlich: Wenn man vom Quadrat der Summe zweier Strecken vier Rechtecke aus diesen Strecken subtrahiert, so bleibt das Quadrat über der Differenz beider Strecken. Der diesem entsprechende Lehrsatz der Arithmetik lautet: Subtrahiert man vom Quadrat der Summe zweier Zahlen das vierfache Produkt aus denselben, so bleibt das Quadrat der Differenz beider Zahlen.

6α) **Rechtecksatz:** Das Quadrat über der halben Summe zweier Strecken ist gleich dem Rechteck aus beiden Strecken und dem Quadrat über der halben Differenz beider Strecken.

Beweis. Die kleinere Strecke sei $AB = a$, das Stück, um welches die andere größer als a ist, die Differenz, heiße $BC = d$, so ist die größere Strecke $AB + BC = AC = a + d$. Halbiert man die Differenz $BC = d$, so stellt AD die halbe Summe beider Strecken vor. [Man erhält nämlich die halbe Summe zweier Strecken (oder Zahlen), wenn man zur kleineren Strecke (Zahl) die Hälfte des Strecken- (Zahlen-)Unterschiedes addiert.]

Fig. 14.



Über AD beschreibe man das Quadrat $ADEF = \left(a + \frac{d}{2}\right)^2$, mache $AG = AB$, bilde aus AC und AG das Rechteck $ACHG$ und ziehe $BK \# AF$. Das Quadrat über der halben Summe beider Strecken, nämlich $\overline{AD}^2$ oder $\left(a + \frac{d}{2}\right)^2$ besteht nun aus folgenden Teilen:

1) dem Quadrate über AB oder a^2;

2) zwei Rechtecken, gebildet aus den Strecken $AB = a$

und der halben Differenz, $\frac{d}{2}$; beide werden durch das Produkt ad bezeichnet;

3) dem Quadrate über der halben Differenz beider Strecken, nämlich aus $\left(\frac{d}{2}\right)^2$. (Vergleiche Lehrsatz 2α.)

Da Rechteck $DCHL$ = Rechteck $GJKF$ ist, so kann man an Stelle der Bestandteile unter 1) und 2) das Rechteck $ACHG$ setzen. Die Grundseite des letzteren ist $AC=(a+d)$, die Höhe $AG = a$, es kann also durch $(a + d) \cdot a$ bezeichnet werden. Mithin ist:

$$\left(a + \frac{d}{2}\right)^2 = (a + d) \cdot a + \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

6β) **Arithmetischer Lehrsatz:** Das Quadrat der halben Summe zweier Zahlen ist dem Produkt beider Zahlen und dem Quadrat der halben Differenz derselben gleich.

Nach diesem Gesetze ist also z. B.:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy$$

und daher auch:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy.$$

7α) **Rechtecksatz:** Der Unterschied zweier Quadrate ist dem Rechteck gleich, das die Summe der Quadratseiten zur Grundseite und ihren Unterschied zur Höhe hat.

In Zeichen: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Der Beweis für diesen Lehrsatz fließt unmittelbar aus der Anschauung, wenn man von einer Ecke A des großen Quadrates aus auf einer Seite desselben die Seite des kleineren Quadrates abträgt, AE, und über AE ein Quadrat beschreibt. Der Unterschied der beiden Quadrate wird alsdann durch das Sechseck $GDCBEF$ dargestellt.

Verlängert man EF bis K, so entsteht das Rechteck $GFKD$. Da Seite DG des letzteren gleich Seite BE des Rechteckes $EBCK$ ist, so kann man Rechteck $GFKD$ so an

Rechteck $EBCK$ legen, daß beide ein einziges Rechteck $KCJH$ bilden. Die Grundseite derselben ist offenbar gleich der Summe der Quadratseiten und die Höhe gleich der Differenz desselben. Da man statt des Rechteckes $KCJH$ das Produkt $(a + b) \cdot (a - b)$ setzen kann, so ist:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

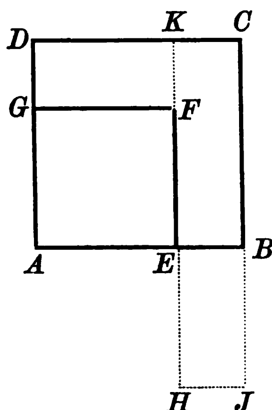


Fig. 15.

7 β) **Arithmetischer Lehrsatz:** Der Unterschied der Quadrate zweier Zahlen ist gleich dem Produkt aus ihrer Summe und ihrer Differenz.

Dieses Gesetz wird mit Vorteil zur numerischen Berechnung des Unterschiedes der Quadrate zweier Zahlen angewendet, wie dies z. B. beim rechtwinkeligen Dreieck vorkommt, wenn aus der Hypotenuse und einer Kathete die Länge der andern gesucht werden soll.

Es sei z. B. $72^2 - 18^2$ zu berechnen. Man hat:

$$(72 + 18) \cdot (72 - 18) = 90 \cdot 54 = 4860.$$

Die Umkehrung der vorigen Formel lautet:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2;$$

d. h. in Worten:

8) **Lehrsatz:** Wenn man die Summe zweier Zahlen mit der Differenz derselben Zahlen multipliziert, so erhält man den Unterschied der Quadrate beider Zahlen.

Dieser Lehrsatz spielt unter den Vorteilen beim Multiplizieren zweier Zahlen, falls die Zehner in den Faktoren um 1 verschieden sind und die Summe der Einer 10 beträgt, eine beachtenswerte Rolle. So ist z. B.:

$$72 \cdot 68 = 70^2 - 2^2 = 4900 - 4 = 4896.$$

In den Lehrbüchern der Arithmetik wird in der Regel der letztere Lehrsatz zuerst aufgestellt und durch Umkehrung desselben der vorletzte Satz abgeleitet.

Wenn man diese Ordnung der Lehrsätze befolgt, so wird der letztere Lehrsatz als der ursprünglich gegebene in folgender Weise entwickelt:

$$22 \cdot 18 = (20 + 2) \cdot (20 - 2)$$
$$= 20^2 + 2 \cdot 20 - 2 \cdot 20 + 2^2 = 20^2 - 2^2.$$
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 + ab - ab + b^2 = a^2 - b^2.$$

Entwickelung des Gesetzes über den Kubus der Summe zweier Zahlen.

$$25^3 = (20 + 5)^3$$
$$= (20 + 5) \cdot (20 + 5) \cdot (20 + 5) \text{ nach dem Potenzbegriffe}$$
$$= (20 + 5) \cdot (20 + 5)^2 = (20 + 5) \cdot (20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 5 + 5^2)$$
$$= 20^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 5 + 3 \cdot 20 \cdot 5^2 + 5^3.$$

Allgemein ist:

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$$
$$= (a + b) \cdot (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.^{*)}$$

9) **Lehrsatz:** Der Kubus der Summe zweier Zahlen besteht aus dem Kubus der ersten Zahl, dem dreifachen Produkt aus dem Quadrate der ersten und der zweiten Zahl, dem dreifachen Produkt aus der ersten und dem Quadrate der zweiten Zahl, und dem Kubus der zweiten Zahl.

Mit Hilfe dieser Formel kann der Kubus eines jeden mehrgliederigen Ausdrucks (Polynoms), dessen Glieder durch + verbunden sind, gebildet werden. So ist z. B.:

$$(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3$$
$$= (a + b)^3 + 3(a + b)^2 \cdot c + 3(a + b) \cdot c^2 + c^3.$$

Kubus einer Differenz:

$$(a - b)^3 = (a - b) \cdot (a^2 - 2ab + b)^2$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

---

*) Diese vier Bestandteile können an einem für diesen Zweck angefertigten zerlegbaren Würfel zur Anschauung gebracht werden.

Wie lautet diese Formel in Worten? — Die beiden letzteren Formeln werden häufig durch:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

dargestellt.

Durch Benutzung dieser Gleichungen kann man leicht die Werte für $(a \pm b)^4$ berechnen. Man erhält:

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.$$

2) Lehrsätze über das Rechnen mit Potenzen.

§ 17.

Beispiele:

$$10^3 \cdot 10^2 = (10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10) = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5.$$

$$a^2 \cdot a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+4} = a^6.$$

I. Formel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Bei der Multiplikation gleichartiger Potenzen müssen ihre Exponenten addiert werden, weil ein Exponent ja nur zählt, wie oft die Grundzahl als Faktor zu setzen ist.

1) **Lehrsatz:** Potenzen mit gleichen Grundzahlen werden miteinander multipliziert, indem man die Grundzahl mit der Summe der Exponenten potenziert.

Wenn wir vorstehende Formel rückwärts lesen, so lautet sie:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

2) **Lehrsatz:** Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man sie mit jedem Summanden potenziert und die erhaltenen Potenzen miteinander multipliziert.

Beispiele (zum folgenden Lehrsatze):

$$10^5 : 10^2 = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10} = 10^{5-2} = 10^3.$$

$$a^6 : a^4 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^{6-4}.$$

II. Formel: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

3) **Lehrsatz:** Potenzen gleicher Basis werden durch

einander dividiert, indem man die Grundzahl mit der Differenz der Exponenten potenziert.

Beweis. Das Produkt aus Quotient und Divisor ist gleich dem Dividenden, denn:

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} \text{ (nach Formel I) } = a^m.$$

In Formel III ist vorausgesetzt, daß der Exponent des Dividenden größer als der Exponent des Divisors ist; denn nur in diesem Falle bezeichnet die Differenz $m - n$ eine natürliche Zahl. Wenn dagegen $n > m$, so ist:

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Erläuterung:

$$a^3 : a^5 = \frac{1 \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}.$$

Beispiel:

$$10^2 \cdot 5^2 = 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 = (10 \cdot 5) \cdot (10 \cdot 5) = (10 \cdot 5)^2.$$

III. Formel: $a^m \cdot b^m = (ab)^m$.

4) **Lehrsatz:** Potenzen mit gleichem Exponenten werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt ihrer Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.

Beweis.

$$\begin{aligned} a^m \cdot b^m = {} & a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots m\text{-mal} \\ & b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdots m\text{-mal} \\ \hline = {} & ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdots m\text{-mal} = (ab)^m. \end{aligned}$$

Formel III lautet in der Umkehrung:

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m.$$

5) **Lehrsatz:** Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert und die erhaltenen Potenzen miteinander multipliziert.*)

*) Vergleiche § 16, 1 und 2.

Beispiele:

$$8^2 : 4^2 = \frac{8 \cdot 8}{4 \cdot 4} = \frac{8}{4} \cdot \frac{8}{4} = \left(\frac{8}{4}\right)^2;$$

$$a^3 : b^3 = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

IV. Formel: $a^m : b^m = (a : b)^m$.

6) **Lehrsatz:** Gleichartige Potenzen werden durcheinander dividiert, indem man den Quotienten ihrer Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.

Beweis. Gemäß der Definitionsformel $D = Q \cdot d$ ist:
$(a : b)^m \cdot b^m = (a : b \cdot b)^m$ (nach Formel III) $= a^m$.

Die Umkehrung von Formel IV, nämlich:

$$(a : b)^m = a^m : b^m,$$

drückt das Gesetz über Potenzierung eines Quotienten aus.

7) **Lehrsatz:** Ein Quotient wird potenziert, indem man sowohl den Dividenden als den Divisor mit dem Exponenten potenziert.

Beispiele:

$$(10^2)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^6;$$
$$(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{12}.$$

V. Formel: $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$.

8) **Lehrsatz:** Eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, indem man die Grundzahl mit dem Produkt aus dem Exponenten und der Zahl potenziert.

Beweis. Nach dem Begriffe der Potenzierung § 14 ist:

$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ n=mal

$= a^{m+m+m} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ n=mal (nach Formel I) $= a^{mn}$.

Formel V lautet rückwärts gelesen:

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m,$$

d. h. in Worten:

9) **Lehrsatz:** Eine Zahl wird mit einem Produkt potenziert, indem man dieselbe zuerst mit einem

Faktor und die erhaltene Potenz mit dem andern Faktor potenziert.

Zusatz. Die Reihenfolge, in welcher eine Zahl mit den einzelnen Faktoren potenziert wird, ist gleichgültig.

Für das praktische Rechnen sind noch folgende oft angewendete Formeln zu merken:

(1) $(a^2 - b^2) : (a \pm b) = a \mp b.$

(2) $(a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2.$

(3) $(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2.$

(4) $(a^4 - b^4) : (a \pm b) = a^3 \mp a^2b + ab^2 \mp b^3.$

(5) $(a^5 + b^5) : (a + b) = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4.$

Die Formeln (1) und (4) drücken folgendes Gesetz aus: 1) Die Differenz zweier gleichartigen geraden Potenzen ist sowohl durch die Summe als durch die Differenz der Grundzahlen (ohne Rest) teilbar. Aus den Formeln (2) und (5) folgt: Die Summe gleich hoher ungerader Potenzen ist nur durch die Summe der Grundzahlen teilbar. Formel (3) spricht das Gesetz aus: 3) Die Differenz zweier gleich hohen ungeraden Potenzen ist nur durch die Differenz ihrer Grundzahlen teilbar. 4) Dagegen ist die Summe zweier Potenzen mit gleichem Exponenten, z. B. $a^2 + b^2$, $a^4 + b^4$, weder durch die Summe noch durch die Differenz der Grundzahlen teilbar. Das Gesetz über die Glieder der Quotienten ist sichtbar. Mittels desselben kann man den Quotienten ohne Rechnung hinschreiben.

Bezeichnet n eine beliebige ungerade Zahl, so ist allgemein:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & (a^n - b^n) : (a - b) \\ & = a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + a^{n-4} \cdot b^3 + \cdots\cdots \\ & \quad + ab^{n-2} + b^{n-1}. \end{aligned} \right.$$

VI. Wurzeln.

1) Wurzelausziehen.

§ 18. Begriff der Wurzel.

Nach § 14 heißt das Produkt, welches durch Multiplikation einer Zahl mit dieser Zahl selbst entsteht, Quadratzahl. In der Flächenrechnung kommen Quadratzahlen häufig vor, wenn aus der Maßzahl der Seite eines Quadrates der Flächeninhalt desselben berechnet werden soll. Quadratzahlen können daher als „Inhalts“= oder „Flächenzahlen“ der Raumgröße „Quadrat“ aufgefaßt und durch letztere versinnlicht werden.

Soll umgekehrt aus dem Inhalt eines Quadrates die Seitenlänge desselben, die Maßzahl einer Seite, ermittelt werden, so muß man diejenige Zahl suchen, deren Quadrat der die Anzahl der Flächeneinheiten darstellenden Zahl gleich ist. Diese Zahl, aus welcher die Quadratzahl als entstanden betrachtet werden kann, nennt man Quadratwurzel (Wurzel des Quadrates). Wäre z. B. der Flächeninhalt eines Quadrates 144 qcm, so ist die Länge einer Quadratseite in cm die Quadratwurzel aus 144 gleich 12, wofür man kurz $\sqrt[2]{144} = 12$ schreibt. Die Zahl 12 ist wirklich die Quadratwurzel aus 144, weil $12 \cdot 12$ oder 12^2 die gegebene Quadratzahl 144 liefert. Man versteht daher unter der Quadratwurzel aus einer beliebigen natürlichen Zahl a, kurz unter $\sqrt{a}$, diejenige Zahl, welche, ins Quadrat erhoben, die Zahl a giebt.

Wie ferner in § 14 gesagt worden ist, nennt man die Zahlen, welche durch zweimalige Multiplikation mit sich selbst herauskommen, Würfel= oder Kubikzahlen. Letztere erscheinen besonders in der Geometrie bei der Berechnung des Körperinhaltes eines Würfels, und es können daher alle Kubikzahlen als „Inhaltszahlen“ dieses Körpers angesehen werden. — Ist nun umgekehrt aus dem Körperinhalt eines Würfels die Kantenlänge desselben zu bestimmen, so muß man diejenige Zahl durch Rechnung finden, welche dreimal als Faktor gesetzt, die gegebene „Inhaltszahl“ des Würfels liefert. Diese gesuchte Zahl heißt Kubikwurzel. Enthält z. B. ein Würfel 1728 cbcm, so ist

seine Kantenlänge in cm gleich der Kubikwurzel aus 1728, was kurz $\sqrt[3]{1728} = 12$ dargestellt wird. Die Zahl 12 ist die richtige Kubikwurzel aus 1728, indem das Produkt $12 \cdot 12 \cdot 12$ oder 12^3 der gegebenen Kubikzahl gleich ist.

Statt Quadrat- und Kubikwurzel sagt man auch zweite, bezw. dritte Wurzel. In der Arithmetik kommen nicht bloß die genannten Wurzeln, sondern auch die vierten, fünften, überhaupt die n-ten Wurzeln aus Zahlen vor. So ist z. B. die vierte Wurzel aus 81 gleich 3, denn $3^4 = 81$, die Zahl 4 die fünfte Wurzel aus 1024, weil $4^5 = 1024$ und a die sechste Wurzel von a^6. Nach § 14 drückt die Gleichung $a^n = p$ folgende Beziehung zwischen den Größen a, n und p aus: wenn man die Grundzahl a mit dem Exponenten n potenziert, so erhält man den Potenzwert p. Betrachtet man nun umgekehrt die Zahlen p und n als bekannt, so kann man sich die Frage vorlegen, wie man die unbekannte Grundzahl findet. Diese Aufgabe führt uns auf eine neue Rechnungsart, das Wurzelausziehen. Bezeichnet man die gesuchte Grundzahl mit x, so muß $x^n = p$ sein. Diese Gleichung, in welcher p und n natürliche Zahlen vorstellen, hat stets nur eine Auflösung, welche man die n-te Wurzel aus p nennt. In Zeichen: $x = \sqrt[n]{p}$. Unter der n-ten Wurzel aus einer Zahl p versteht man diejenige natürliche Zahl, welche, mit n potenziert, die Zahl p giebt. Das Rechnungsverfahren, wodurch man die Wurzel findet, heißt Wurzelausziehen oder Radizieren. Diese Rechnungsart ist die Umkehrung der Potenzierung. Die Potenz p erhält nun den Namen Radikand und der Potenzexponent wird zum Wurzelexponent. Das Zeichen, welches das Wurzelausziehen andeutet, heißt Wurzelzeichen. Über das Wurzelzeichen setzt man den Wurzelexponenten, mit welchem die gegebene Zahl radiziert werden soll. Beim Ausziehen der Quadratwurzel ist es gebräuchlich, den Wurzelexponenten fortzulassen.

§ 19. Geometrische Versinnlichung des Ausziehens der Quadratwurzel.

a) Vorbereitung. Die Wurzeln der Quadratzahlen im Zahlenkreise 1 bis 100 sind aus dem Einmaleins geläufig. Auch die Quadratwurzeln mancher zwei- und dreistelliger Zahlen sind aus den entsprechenden Aufgaben des Potenzierens bekannt. Bei größeren Zahlen bedarf es zur Bestimmung ihrer Wurzeln eines besondern Rechnungsverfahrens. Das Ausziehen der Quadratwurzel ist die Umkehrung des Quadrierens von Zahlen. Fassen wir den gegebenen Radikanden als Inhaltszahl eines Quadrates auf, so versinnlicht eine Seite des Quadrates die Wurzel der Inhaltszahl und es ist das Ausziehen der Quadratwurzel nichts anderes, als die Ermittelung der Länge einer Quadratseite. Um daher die Grundlage für das einzuschlagende Verfahren zu gewinnen, muß man sich die Bestandteile eines zusammengesetzten Quadrates, nämlich des Quadrates über der Summe zweier Strecken, wohl merken.

Nach § 14, Rechtecksatz 2α ist der Flächeninhalt eines Quadrates von 24 cm = (20 + 4) cm aus folgenden Stücken zusammengesetzt:

1) dem Quadrate über 20 cm = 20 · 20 · 1 qcm = 400 qcm Inhalt;

2) zwei Rechtecken mit der Grundseite 20 cm und der Höhe 4 cm = 2 · 20 · 4 qcm Inhalt;

3) dem Quadrate über 4 cm = 4 · 4 qcm Inhalt.

Das Quadrat einer zweistelligen Zahl besteht:

1) aus dem Quadrate der Zehner, nämlich $20 \cdot 20 = 20^2$;

2) aus dem doppelten Produkt der Zehner und Einer, $2 \cdot (20 \cdot 4)$;

3) aus dem Quadrate der Einer, $4 \cdot 4 = 4^2$.

Vor Beginn der Rechnung zur Ermittelung der Quadratwurzel teilt man den Radikanden von rechts nach links in Klassen von je zwei Stellen. Um klar einzusehen, weshalb dies geschieht, beachte man, daß die Quadrate der Zahlen 1 bis 9 eine ein- oder zweizifferige Zahl liefern und nach dem Dezimal-

system jeder Ziffer ein Stellenwert zukommt. Bedeuten die Zahlen 1 bis 9 Einer, so muß offenbar das Quadrat derselben die erste und zweite Stelle der Quadratzahl, bezw. nur die Einer bedecken. Umgekehrt muß der Teil der Wurzel, der die Einer bezeichnet, stets in den Zehnern und Einern oder in letzteren allein enthalten sein. Stellen hingegen die einstelligen Zahlen Zehner vor, so liefert das Quadrat dieser Zehnerzahlen entweder nur Hunderter oder Tausender und Hunderter. Hieraus folgt, daß die Zehner der Wurzel entweder nur auf den Stellen der Tausender und Hunderter, oder in der letzteren Zahlordnung allein zu suchen sind. Bezeichnen die Zahlen 1 bis 9 Hunderter, so bestehen ihre Quadrate entweder nur aus Zehntausendern oder aus Hunderttausendern und Zehntausendern. Hieraus ergiebt sich, daß die Hunderter der Wurzel in den Zahlordnungen der Hundert- und Zehntausender oder in letzterer Ordnung allein enthalten sein müssen u. s. w. Die Wurzel enthält so viele Stellen, als der Radikand Klassen hat. Es ist jedoch zu beachten, daß die höchste Klasse auch nur eine Ordnung umfassen kann. In letzterer ist alsdann das Quadrat der höchsten Rangziffer der Wurzel enthalten.

Diese rein arithmetische Begründung der Einteilung einer Quadratzahl in Klassen findet eine Analogie in der Raumlehre, bezw. in der Einteilung der Flächenmaße. Den Zahlordnungen Einer, Zehner, Hunderter, Tausender kann man bestimmte Benennungen des metrischen Systems, etwa die Längenmaße m, dkm, hm, km zur Seite stellen. Die Zahl 5468 besteht aus 8 Einern, 6 Zehnern, 4 Hundertern und 5 Tausendern; 5468 m enthalten 8 m, 6 dkm, 4 hm und 5 km. Das Quadrat, dessen Seitenlänge 5468 m beträgt, hat einen Flächeninhalt von $5468 \cdot 5468$ qm $= 29\,89\,90\,24$ qm. Da nun die Flächenmaße, falls keine Abteilung übersprungen wird, durchgängig durch die Zahl 100 fortschreiten, so können wir diesen Inhalt auch durch 29 qkm + 89 qhm + 90 qdm + 24 qm ausdrücken. In vorliegender Quadratzahl gehören mithin die beiden ersten Stellen den qm, die folgende Abteilung den qdkm, die dritte den qhm, die vierte den qkm an. Wäre die Inhaltszahl $29\,89\,90\,84$ qcm,

so würde man dieselbe durch 29 qdkm + 89 qm + 90 qdm + 84 qcm darstellen können. Hieraus folgt: Ist der Inhalt eines Quadrates in qcm gegeben und die Flächenzahl zweistellig, so enthält die Seite des Quadrates nur cm. Hat dagegen die Quadratzahl 3 oder 4 Stellen, so muß die Wurzel entweder nur dm oder dm und cm enthalten. Wenn z. B. $J = 4096$ qcm $= 40$ qdm $+ 96$ qcm ist, so besteht die Länge einer Quadratseite aus dm und cm. Falls die beiden ersten Stellen der Flächenzahl Nullen sind, enthält die Quadratseite nur dm. Fassen wir nun die Quadratzahlen als wirkliche Inhaltszahlen eines Quadrates auf, was stets statthaft ist, so leuchtet aus dem Gesagten der Grund ein, weshalb vor der Rechnung des Wurzelausziehens der Radikand von rechts nach links in Klassen oder Abteilungen von je zwei Stellen zerlegt wird.

b) Aufgabe: Die Quadratwurzel aus 5184 zu ziehen. Betrachten wir 5184 als eine den Flächeninhalt eines Quadrates bezeichnende Zahl, und zwar als 5184 qcm $= 51$ qdm $+ 84$ qcm, so enthält die Seite des entsprechenden Quadrates nach den Erörterungen unter a) dm und cm. Figur 9, Seite 52 versinnliche die Inhaltszahl 5184 qcm, welche nach a) aus dem Inhalte des Quadrates über AB, zwei gleichen aus den Strecken AB und BC gebildeten Rechtecken und dem Quadrate über BC besteht. Der Inhalt des Quadrates über der Strecke AB steckt in den 51 qdm der Flächenzahl; folglich ist Seite AB des Quadrates gleich $\sqrt{49} = 7$ dm. Ziehen wir den Inhalt dieses Quadrates, nämlich 49 qdm, von 51 qdm bezw. vom ganzen Inhalt ab, so bleiben 2 qdm $+ 84$ qcm $= 284$ qcm für die beiden Rechtecke $2ab$ und das Quadrat über BC. Da die Länge der Rechtecke bekannt, nämlich gleich der Quadratseite AB ist, so finden wir die Breite BC, indem wir 284 durch $2 \cdot 70$ teilen. $284 : 140 = 2$ Rest 4; mithin ist $BC = 2$ cm. Das Quadrat über BC hat einen Inhalt von 4 qcm. Ziehen wir letzteren von dem Rest ab, so bleibt nichts übrig. Da die Bestandteile eines zusammengesetzten Quadrates mit den Längen $AB = 7$ dm

und $BC = 2$ cm beim Subtrahieren vom Inhalt des Quadrates keinen Rest übrig lassen, so muß die Seitenlänge desselben 7 dm + 2 cm = 72 cm groß sein. Die Quadratwurzel aus 5184 ist mithin die Zahl 72.

Zur Versinnlichung des Verfahrens bei fünf- und mehrstelligen Zahlen benutze man die Figur zu Rechtecksatz 3 Seite 55 und die dort gegebenen Erörterungen.

Geschichtliche Bemerkung. Schon der griechische Mathematiker Theon von Alexandria, welcher zur Zeit der Regierung Theodosius des Großen lebte, lehrte das Ausziehen der Quadratwurzel mit geometrischer Versinnlichung des Verfahrens in der heute üblichen Weise, nur benutzte er statt der dezimalen Sexagesimal-Brüche.

Das Ausziehen der Quadratwurzeln aus zusammengesetzten allgemeinen Ausdrücken geschieht nach der Formel:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b.$$

Denn da das Quadrat des Binoms $a + b$ als Norm für die Bildung der Quadrate aller mehrgliederigen Ausdrücke dienen kann (§ 16 3β u. f. f.), so kann die Radizierung, als die Umkehrung des Potenzierens, auch allgemein nach vorstehender Formel ausgeführt werden.

Anfänger begehen häufig den Fehler, jedes Glied eines zusammengesetzten Radikanden zu radizieren, z. B. zu rechnen:

$$\sqrt{16 + 9} = 4 + 3 = 7; \qquad \sqrt{a^2 + b^2} = a + b;$$
$$\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b.$$

Diese Gleichungen sind unrichtig, hier entsteht nämlich durch Potenzieren der Wurzeln mit dem Exponenten nicht der Radikand.

§ 20. Rein arithmetische Berechnung der Quadratwurzel.

Darstellung des Rechnungsverfahrens:

$$\begin{array}{rrl}
 & \sqrt{51|84} & = 70 = a \\
a^2 = 70^2 = & 49\,00 & \\
2a = 140 \div & 2\,84 & = \;\; 2 = b \\
2ab = 140 \cdot 2 = & 2\,80 & \\
 & 4 & \\
b^2 = 2^2 = & 4 & \\
 & 0. &
\end{array}$$

Erläuterung des rein arithmetischen Verfahrens: Die Quadratzahl 5184 besteht aus zwei Klassen; folglich enthält die Wurzel zwei Stellen. Zuerst ist von der Quadratzahl das Quadrat der Zehner zu subtrahieren. Da dieses Produkt nur die Hunderter bezw. die Hunderter und Tausender des Quadrates besetzt, so muß dasselbe in den 51 Hundertern enthalten sein. Wir erhalten die Anzahl Zehner der Wurzel, indem wir die größte ganze Zahl suchen, deren Quadrat in 51 Hundertern steckt. Die gesuchten Zehner sind offenbar $a = 7$. Durch Subtraktion des Zehner-Quadrates, nämlich 4900 von 5100, bleiben 2 Hunderter als Rest. Da der zweite Bestandteil der Quadratzahl, 2 × Zehner × Einer, in den Zehnern der Quadratzahl steckt, so verwandeln wir die 2 Hunderter in Zehner und fügen die 8 Zehner der zweiten Klasse hinzu. Um die Einer der Wurzel zu erhalten, dividieren wir $2a = 2 \times 7$ Zehner in 28 Zehner. Der gesuchte Quotient liefert 2 Einer. Nach Subtraktion von 2×7 Zehner $\times 2 = 28$ Zehner von 28 Zehnern bleibt 0 übrig. Nun nehmen wir die 4 Einer herunter. Von diesen das Quadrat der Einer subtrahiert, liefert den Rest Null. Da durch Subtraktion der Bestandteile des Ausdrucks $(70 + 2)^2$ von der Quadratzahl 5184 der Rest 0 entsteht, so ist $\sqrt{5184} = 72$.

Läßt man die den Rang der Ziffern bezeichnenden Nullen weg und zieht vor Subtraktion eines Bestandteiles stets nur eine Ziffer herunter, so erscheint die Rechnung in folgender kürzerer Form:

$$\begin{array}{rr} & \sqrt{5184} = \overset{a+b}{72} \\ a^2 = 7^2 = & \underline{49} \\ 2a = 14 \div & \overline{28} \\ 2ab = 14 \cdot 2 = & \underline{28} \\ & 4 \\ b^2 = 2^2 = & \underline{4} \\ & '' \end{array}$$

Wie in § 16 geometrisch und arithmetisch erläutert worden ist, kann die Formel für das Quadrieren eines Binoms $a + b$ als Richtschnur für die Bildung der Quadrate aller mehr-

gliedrigen Ausdrücke dienen. Es ist z. B., wenn wir die Zehner der Zahl 245 mit a und die Einer mit b bezeichnen:

$$245^2 = (240 + 5)^2 = 240^2 + 2 \cdot 240 \cdot 5 + 5^2 = 60025.$$

Wenn daher in einer beliebigen mehrstelligen Wurzel die Einer durch b und die übrigen Stellen mit a bezeichnet werden, so besteht die Quadratzahl aus folgenden Stücken:

1) dem Quadrate des ersten Teiles,

2) dem doppelten Produkt des ersten und zweiten Teiles;

3) dem Quadrate des zweiten Teiles.

Da nun die Ausziehung der Quadratwurzel die Umkehrung des Quadrierens ist, so muß die Formel:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$$

auch auf solche Quadratzahlen anwendbar sein, deren Wurzeln mehr als zwei Stellen enthalten. So ist z. B.:

$$\sqrt{60025} = \sqrt{240^2 + 2 \cdot 240 \cdot 5 + 5^2} = 240 + 5.$$

Hat man daher durch Rechnung wie vorhin zwei Stellen der Wurzel gefunden, so betrachte man diese als ersten Teil a und bestimme alsdann den folgenden Teil b' u. s. f.

Beispiel:

$$\sqrt{614656} = \overbrace{\underbrace{7\,8}_{a'}\,\underbrace{4}_{b'}}^{a+b}$$

$a^2 = 7^2 =$	49
	124
$2a = 14 \div$	
$2ab = 14 \cdot 8 =$	112
	126
$b^2 = 8^2 =$	64
$2a' = 2 \cdot 78 \div$	625
$2a'b = 2 \cdot 78 \cdot 4 =$	624
	16
$b'^2 = 4^2 =$	16
	″

Ausziehen der Kubikwurzel.

§ 21. Begriff der Kubikwurzel.

Zufolge der in § 14 gegebenen Erklärung nennt man die bei Berechnung des Körperinhaltes eines Würfels entstehende

Zahl Würfel= oder Kubikzahl oder kurzweg Kubus. Ist nun der Inhalt eines Würfels gegeben, so kann man die Frage stellen, wie groß die Kantenlänge dieses Würfels sei. Die Beantwortung dieser Frage fällt mit der Aufgabe zusammen, aus der Kubikzahl diejenige Zahl zu berechnen, deren Kubus der gegebenen Würfelzahl gleich ist. Die gesuchte Zahl, welche dreimal als Faktor zu setzen ist, damit aus diesem Produkt die Kubikzahl entsteht, heißt Kubikwurzel der gegebenen Zahl, und das Rechnungsverfahren, wodurch die Kubikwurzel gefunden wird, nennt man „Ausziehen der Kubikwurzel". So ist z. B. die Kubikwurzel aus 216 die Zahl 6, weil $6^3 = 216$ ist. Um anzudeuten, daß aus einer Zahl die Kubik= oder dritte Wurzel gezogen werden soll, setzt man über den Radikanden das Wurzelzeichen mit dem Wurzelexponenten 3, und schreibt z. B. $\sqrt[3]{216} = 6$. — Aus der Beziehung zwischen Würfel und Würfelzahl und Kante und Kubikwurzel geht hervor, daß die Kubikzahl und ihre Kubikwurzel durch einen Würfel und seine Kantenlänge, bezw. die Seite eines der gleichen Quadrate, welche den Würfel begrenzen, versinnlicht wird.

§ 22. Gesetze der Kubierung und ihrer Umkehrung, des Ausziehens der Kubikwurzel.

Die Kubikwurzeln, welche einstellige Zahlen sind, und ihre entsprechenden Kubikzahlen sind aus folgender Darstellung ersichtlich. Zur Berechnung von zwei= und mehrstelligen Kubikwurzeln ist die feste Einprägung dieser Tabelle unerläßlich.

Kubikwurzeln:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kubikzahlen:	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Aus dieser Darstellung ergiebt sich durch Umkehrung

Folgerung 1: Die Kubikwurzeln aller ein=, zwei= und dreistelligen Zahlen sind einstellig, d. h. die Wurzel enthält nur Einer.

Bedeuten die Einheiten der Zahlen 1 bis 9 Zehner, so erhalten die zugehörigen Kubikzahlen drei Nullen:

$$10^3 = 1000, \quad 20^3 = 8000, \cdots\cdots 90^3 = 729000.$$

Folgerung 2: Die Kubikwurzeln aller vier- bis sechsstelligen Zahlen sind zweistellig, d. h. die Wurzel besteht entweder nur aus Zehnern oder aus Zehnern und Einern.

Stellen die Einheiten der einstelligen Zahlen Hunderter vor, so erhält jede der Kubikzahlen der Tabelle rechts sechs Nullen angehängt:

$$100^3 = 1000000, \quad 200^3 = 8000000, \cdots\cdots$$
$$900^3 = 729000000.$$

Folgerung 3: Alle sieben- bis neunstelligen Kubikzahlen haben dreistellige Kubikwurzeln.

Die in diesen Folgerungen dargelegten Wahrheiten sind der Grund, weshalb man vor Beginn der Rechnung des Kubikwurzel-Ausziehens die Kubikzahl von rechts nach links in Abteilungen oder Klassen von je drei Stellen teilt. Bei dieser Einteilung kann selbstverständlich die höchste Klasse auch nur zwei Ziffern oder eine Stelle enthalten.

Fassen wir die gegebene Zahl, aus welcher die Kubikwurzel gezogen werden soll, als wirkliche Inhaltszahl eines Würfels auf, so können wir die Einteilung der Kubikzahl in dreizifferige Klassen durch die Einteilung der Körpermaße begründen. Der Körperinhalt eines Würfels von 9 cm Kantenlänge beträgt 729 cbcm. Hieraus folgt umgekehrt: Enthält die Inhaltszahl nur cbcm, so hat die Kante des Würfels nur cm. Ist die Kante des Würfels 24 cm = 2 dm + 4 cm lang, so ist sein Körperinhalt 13824 cbcm. Da nun je zwei aufeinander folgende Abteilungen der Körpermaße konsequent durch die Zahl 1000 fortschreiten, so kann man 13824 cbcm auch durch 13 cbdm + 824 cbcm ausdrücken. Umkehrung: Besteht eine Kubikzahl aus zwei Abteilungen, cbdm und cbcm, so enthält die Würfelkante dm und cm. Der Inhalt eines Kubus von 234 cm = 2 m + 3 d + 4 cm Kantenlänge

beträgt 12812904 cbcm = 12 cbm + 812 cbdm + 204 cbcm. Umkehrung: Kann man die Würfelzahl durch drei Abteilungen, cbm, cbdm und cbcm darstellen, so besteht die Kantenlänge des Würfels aus m, dm und cm.

An einem zum Zwecke der Belehrung angefertigten zerlegbaren Würfel von 18 cm = (10 + 8) cm Kantenlänge kann man folgende Bestandteile dieses Körpers zur Anschauung bringen:

1) einen Würfel, dessen Kante 10 cm lang ist. Der Kubikinhalt dieses Würfels beträgt 10^3 cbcm = 1000 cbcm;

2) drei kongruente Prismen; jedes Prisma hat eine quadratische Grundfläche von 10 cm Seitenlänge und seine Höhe beträgt 8 cm. Der Gesamtinhalt dieser Prismen ist $3 \cdot 10^2 \cdot 8$ cbcm = 2400 cbcm;

3) drei kongruente Prismen, jedes Prisma von $8 \cdot 8$ qcm Grundfläche und 10 cm Höhe. Der Gesamtinhalt dieser drei Prismen ist $3 \cdot 10 \cdot 8^2$ cbcm = 1920 cbcm;

4) einen Würfel von 8 cm Kantenlänge; sein Inhalt ist 8^3 cbcm = 512 cbcm.

Mithin ist der Kubikinhalt des ganzen Würfels

$$18 \cdot 18 \cdot 18 \text{ cbcm} = 5832 \text{ cbcm}.$$

Legt man der Rechnung zur Bildung des Kubus eines Binoms die § 16, 9 entwickelte Formel:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

zugrunde und setzt $a = 1$ Zehner, $b = 8$ Einern, so ist:

$a^3 = 10^3 =$ dem Kubus der Zehner.

$3a^2b = 3 \cdot 10^2 \cdot 8 = 3 \times$ Quadrat der Zehner $\times$ Einer.

$3ab^2 = 3 \cdot 10 \cdot 8^2 = 3 \times$ Zehner $\times$ Quadrat der Einer.

$b^3 = 8^3 =$ dem Kubus der Einer.

Die Bestandteile rechts vom Gleichheitzeichen sind also der Ausdruck des besondern Gesetzes, welches bei Bildung des Kubus zweistelliger dekadischer Zahlen zu befolgen ist. Der Kubus der Zehner liefert Tausender, d. h. dieses Produkt besetzt die niedrigsten Stellen der Kubikzahl mit Nullen. Der zweite

Bestandteil giebt Hunderter zum Produkt, d. h. die Rangordnungen der Einer und Zehner sind mit Nullen besetzt. Das dritte Stück liefert ein Produkt aus Zehnern, es besetzt also die niedrigste Zahlordnung (Einer) mit einer Null. Endlich der vierte Bestandteil der Kubikzahl, der Kubus der Einer, bedeckt wenigstens in jedem Falle die Einer. Die Kubus von 3 Einern und 4 Einern besetzen die Ordnungen der Zehner und Einer und die dritten Potenzen der Einer 5 bis 9 bedecken die niedrigste Klasse der Würfelzahl, wie die Tabelle zeigt.

Nach den vorhergegangenen Erörterungen ist der Kubikinhalt eines Würfels von 25 cm = (20 + 5) cm Kantenlänge:

$$(20 + 5)^3 \text{ cbcm}$$

$$= (20^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 5 + 3 \cdot 20 \cdot 5^2 + 5^3) \text{ cbcm} = 15625 \text{ cbcm}$$

oder in rein arithmetischem Sinne:

$$(20 + 5)^3 = 20^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 5 + 3 \cdot 20 \cdot 5^2 + 5^3 = 15625.$$

Da nun das Ausziehen der Kubikwurzel die Umkehrung der Operation des Kubierens ist, so muß:

$$\sqrt[3]{20^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 5 + 3 \cdot 20 \cdot 5^2 + 5^3} = 20 + 5$$

oder allgemein:

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$$

sein. Und wie bei Bildung des Kubus der Summe zweier natürlichen Zahlen die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen addiert werden, bezw. die Summe dieser Teile in einer Kubikzahl enthalten ist, so muß man umgekehrt bei Berechnung der Kubikwurzel dieselben Bestandteile bilden und sie in derselben Ordnung von der Würfelzahl subtrahieren. Bleibt nach dieser Subtraktion kein Rest, so sind die erhaltenen Summanden $a + b$ die richtige Kubikwurzel der gegebenen Kubikzahl.

§ 23. Ausziehen der Kubikwurzel mittels geometrischer Versinnlichung.

Aufgabe: Aus dem Kubus 46656 die Kubikwurzel zu ziehen.

Auflösung: Wir betrachten die gegebene abstrakte Zahl als Inhaltszahl eines Würfels und zwar als 46 656 cbcm. Da wir diese Inhaltszahl durch zwei Abteilungen der Körpermaße, nämlich durch 46 cbdm + 656 cbcm, darstellen können, so enthält die gesuchte Kantenlänge des Würfels dm und cm. Von dem Inhalt des Kubus müssen wir nach § 22 zuerst den Inhalt des Würfels subtrahieren, der zur Kante die gesuchte Anzahl dm hat, also a^3 cbdm. Da der Kubus der Zahl a, welche durch die Würfelkante versinnlicht wird, in 46 cbdm steckt, so muß derselbe der nächst kleinern Würfelzahl 27 gleich sein. Die Kantenlänge dieses Würfels beträgt also $a = 3$ dm, welche den ersten Teil der Kubikwurzel bilden. Nach Subtraktion von 27 cbdm vom ganzen Inhalt bleiben noch 19 cbdm + 656 cbcm = 19 656 cbcm. In diesem Rest sind zunächst enthalten die Inhalte von drei Prismen mit $3a^2b$ cbcm. An Stelle dieser drei Prismen können wir ein Prisma setzen, dessen Grundfläche durch $3a^2$ und dessen Höhe mit b bezeichnet wird. Nun findet man die Höhe eines Prismas, wenn man die abstrakten Inhaltszahlen von Körper und Grundfläche durch einander dividiert. Die gesuchte Höhe b beträgt also:

$$19656 : 3 \cdot 30^2 = 19656 : 2700 = 6 \text{ (cm)}.$$

Da nun der Teil der Würfelkante, der die gesuchte Anzahl cm oder den zweiten Teil der Wurzel enthält, die Höhe b des Prismas ist, so muß der andere Kantenteil des gegebenen Würfels 6 cm lang sein. Subtrahieren wir den Inhalt des Prismas, nämlich $3a^2b$ cbcm = 16 200 cbcm von 19 656 cbcm, so bleiben 3456 cbcm. Hiervon ist nun der Inhalt von drei Prismen mit $3ab^2$ cbcm = $3 \cdot 30 \cdot 6^2$ cbcm = 3240 cbcm abzuziehen, wodurch ein Rest von 216 cbcm entsteht. Und wenn wir von dieser Zahl den Kubus von 6 cm Kantenlänge, nämlich 216 cbcm, subtrahieren, so bleibt Null übrig, woraus wir schließen, daß die Kantenlänge eines Würfels von 46 656 cbcm Inhalt 6 dm + 6 cm = 36 cm lang sein muß. Mithin ist:

$$\sqrt[3]{46656} = 36.$$

§ 24. Rein arithmetisches Verfahren beim Ausziehen der Kubikwurzel.

Darstellung des Rechnungsverfahrens:

$$\begin{array}{rrl} & \sqrt[3]{46656} & = 30 = a \\ a^3 = 30^3 = & 27000 & \\ 3a^2 = 2700 \div & 19656 & = \ \ 6 = b \\ 3a^2b = 2700 \cdot 6 = & 16200 & \\ & 3456 & \\ 3ab^2 = 3 \cdot 30 \cdot 6^2 = & 3240 & \\ & 216 & \\ b^3 = 6^3 = & 216 & \\ & " & \end{array}$$

Arithmetische Erläuterung dieser Rechnung. Da die Kubikzahl aus zwei Abteilungen besteht, so ist die Kubikwurzel eine zweistellige Zahl. Zunächst ist von der Kubikzahl der Kubus der Zehner zu subtrahieren. Derselbe steckt nach dem vorigen Paragraphen in den (46) Tausendern und muß 27 Tausender betragen. Die Anzahl der Zehner der Wurzel ist also gleich $\sqrt[3]{27} = 3$. Nach Subtraktion des Zehnerkubus von 46 Tausendern bleiben noch 19 Tausender. Nun muß das dreifache Produkt aus dem Quadrate der Zehner und den Einern subtrahiert werden. Da dieses Produkt in den Hundertern des Kubus enthalten ist, so verwandeln wir den Rest (19 Tausender) in Hunderter und addieren die 6 Hunderter der folgenden Klasse hinzu. Die gesuchten Einer erhält man, wenn man 196 Hunderter durch das dreifache Quadrat der Zehner, also durch 27 Hunderter dividiert. Der zweite Teil der Wurzel beträgt also $196 : 27 = 6$. Das abzuziehende Produkt heißt also 6×27 Hunderter $= 162$ Hunderter. Durch Subtraktion desselben bleiben 34 Hunderter übrig. Da der dritte Bestandteil eines Kubus, $3 \times$ Zehner $\times$ Quadrat der Einer, ein Produkt aus Zehnern bildet, so drücken wir den Rest in Zehnern aus und fügen die Zehner der Kubikzahl hinzu, das giebt 345 Zehner. Hiervon $3 \cdot 3 \cdot 6^2$ Zehner $= 324$ Zehner subtrahiert, bleiben 21 Zehner. Schließlich

ist noch der Kubus der Einer, nämlich $6^3 = 216$, abzuziehen, wodurch die Rechnung aufgeht.

Wenn man die den Rang der Ziffern bezeichnenden Nullen wegläßt und vor der Subtraktion eines Bestandteiles des Kubus jedesmal nur eine Ziffer der Klasse zum Reste „herunternimmt", so ergiebt sich folgende kürzere Darstellung:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt[3]{46|656} = 36 \\ a^3 = & 27 \\ 3a^2 = 27 \div & \overline{196} \\ 3a^2b = 27 \cdot 6 = & 162 \\ & \overline{345} \\ 3ab^2 = 3 \cdot 3 \cdot 6^2 = & 324 \\ & \overline{216} \\ b^3 = 6^3 = & 216 \\ & \overline{''} \end{array}$$

Zufolge § 16 kann der Kubus einer zweiteiligen Summe $a + b$ als Wegweiser für die Bildung der Kuben aller mehrgliedrigen Ausdrücke sein. So ist z. B.:

$$345^3 = (340 + 5)^3$$
$$= 340^3 + 3 \cdot 340^2 \cdot 5 + 3 \cdot 340 \cdot 5^2 + 5^3.$$

Zerlegt man daher irgend eine mehrstellige natürliche Zahl in zwei Teile und bezeichnet die Einer mit b, alle übrigen Zahlordnungen, also $n - 1$ Stellen mit a, so wird das in § 16 für eine zweiteilige Summe entwickelte Gesetz allgemein so lauten:

Der Kubus irgend einer Summe besteht:

1) aus dem Kubus des ersten Teiles;

2) aus dem Dreifachen des Quadrates des ersten Teiles multipliziert mit dem zweiten Teile;

3) aus dem dreifachen Produkt des ersten Teiles mit dem Quadrate des zweiten Teiles;

4) aus dem Kubus des zweiten Teiles.

Die Formel:

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$$

kann daher durchgängig beim Ausziehen der Kubikwurzel zur Richtschnur dienen. Man berechne zunächst wie vorhin zwei

Stellen der Wurzel, dann sehe man diese als ersten Teil a' an und bestimme den folgenden Teil b', u. s. w., z. B.:

$$\sqrt[3]{17|173|512} = \overset{a+b+c}{\underbrace{25}_{a'}\underbrace{8}_{b'}}$$

$$\begin{array}{rr}
a^3 = 2^3 = & 8 \\
3a^2 = 12 \;\text{-:-} & 91 \\
3a^2b = 12 \cdot 5 = & 60 \\
 & 317 \\
3ab^2 = 3 \cdot 2 \cdot 5^2 = & 150 \\
 & 1673 \\
b^3 = 5^3 = & 125 \\
3a'^2 = 1875 \;\text{-:-} & 15485 \\
3a'^2b' = 1875 \cdot 8 = & 15000 \\
 & 4851 \\
3a'b'^2 = 3 \cdot 25 \cdot 8^2 = & 4800 \\
 & 512 \\
b'^3 = 8^3 = & 512 \\
 & //
\end{array}$$

Geschichtliche Bemerkungen. Der Pythagoreer Nikomachus von Gerasa (etwa 100 n. Chr.) bildete die Kubikzahlen durch Summierung aufeinanderfolgender ungeraden Zahlen. Er sagt: „Die erste Kubikzahl ist gleich der ersten ungeraden Zahl, die zweite gleich der Summe der beiden folgenden, die dritte entsteht durch Addition der drei folgenden ungeraden Zahlen", wie folgende Darstellung zeigt:

$$\begin{array}{r}
1 = 1^3 = 1 \\
3 + 5 = 2^3 = 8 \\
7 + 9 + 11 = 3^3 = 27 \\
13 + 15 + 17 + 19 = 4^3 = 64
\end{array} \quad \text{u. s. w.}$$

Der Inder Âryabhatta (476 n. Chr.) bediente sich zuerst der Formeln:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

zur Berechnung der Quadrat- bezw. der Kubikwurzel. Er spricht ausdrücklich von der Einteilung des Radikanden in zwei- bezw. dreistellige Abschnitte vor Ausführung der Rechnung. „Wurzel überhaupt, auch in der Bedeutung der Wurzel einer Pflanze, heißt mûla oder pada; varga bedeutet eine Reihe gleicher Gegenstände, dann ein Quadrat im geometrischen wie im arithmetischen Sinne des Wortes; ghana bezeichnet einen Körper. Durch Zusammensetzung dieser Ausdrücke gewann man die Namen varga mûla, d. i. Quadratwurzel und ghana mûla, d. i. Kubikwurzel."*)

*) Cantor, „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", 1. Band. Colebrooke, Arithmetik und Algebra des Brahmegupta und Bhâscara. London 1817.

2) Lehrsätze über das Rechnen mit Wurzeln.

§ 25.

Nach § 18 nennt man den aus der Gleichung $x^n = p$ für x sich ergebenden Wert, nämlich die Zahl $\sqrt[n]{p}$, eine Wurzel. Deutet man nämlich die Radizierung einer Zahl bloß an, ohne die Berechnung der wirklichen Wurzel auszuführen oder bewerkstelligen zu können, so nennt man den Ausdruck einen Wurzelausdruck oder eine Wurzelgröße. Der Ausdruck $\sqrt[n]{p}$ ist daher die allgemeine Form einer Wurzelgröße. Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten heißen gleichartige. Wie bereits bemerkt, soll die Wurzel $\sqrt[n]{p}$ eine natürliche Zahl bezeichnen. Da man aus einer einfachen allgemeinen Zahl p nicht wie bei bestimmten Zahlen die wirkliche Wurzel berechnen kann, so ist es nötig, die Gesetze zu kennen, nach welchen mit Zahlformen von der Art $\sqrt[n]{p}$ gerechnet werden muß. — Die Operationen der ersten Stufe können nur an Wurzeln mit gleichem Radikanden und gleichem Wurzelexponenten vollzogen werden.

§ 26. **Die Grundgesetze über Wurzeln.**

Gemäß der Definition der Wurzel (§ 18) sagt die aus der Grundgleichung $x^n = p$ abgeleitete Gleichung $x = \sqrt[n]{p}$ nichts anderes, als daß:

Definitionsformel I. $\sqrt[n]{p^n} = p$;

denn die Wurzel p mit der Zahl n potenziert liefert den Radikanden p^n. Ferner muß auch:

Definitionsformel II. $(\sqrt[n]{p})^n = p$

sein, denn der Ausdruck $\sqrt[n]{p}$ bedeutet diejenige Zahl, die durch Potenzierung mit n die Potenz p giebt. Aus Formel II ergiebt sich sehr klar, daß Potenzieren und Radizieren inverse Rechnungsarten sind, die mit derselben Zahl vollzogen, sich gegenseitig aufheben.

Beispiele:

$$\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3\cdot 2]{8^{2\cdot 2}} = 2^2; \qquad \sqrt[4]{36^2} = \sqrt[4:2]{36^{2:2}} = \sqrt{36} = 6.$$

III. Formel: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot c]{a^{m\cdot c}} = \sqrt[n:c]{a^{m:c}}$.

Gesetz der Wertbeständigkeit einer Wurzel: Der Wert einer Wurzel bleibt ungeändert, wenn man Wurzel- und Potenzexponenten mit derselben Zahl multipliziert oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

Alle Beweise für die Richtigkeit der Formeln, welche Lehrsätze über Wurzeln ausdrücken, werden auf Grund der Definition einer Wurzel geführt, man zeigt, daß die Wurzelgröße mit dem Wurzelexponenten potenziert den Radikanden giebt.

Um also die Richtigkeit der Formel III zu beweisen, zeigen wir erstens, daß die Wurzel $\sqrt[n]{a^m}$ mit dem Wurzelexponenten $n \cdot c$ potenziert den Radikanden $a^{m\cdot c}$ liefert. Es ist:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n\cdot c} = \left[\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^m\right]^c$$

gemäß § 17 Lehrsatz 9. Nach Formel II kann man für den Ausdruck rechts den kürzeren $(a^m)^c$ setzen und dieser ist gemäß § 17, 8 gleich dem Radikanden a^{mc}. — Die Richtigkeit des zweiten Teiles vorstehenden Lehrsatzes folgt aus der bewiesenen Formel $\sqrt[n\cdot c]{a^{m\cdot c}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Lehrsatz: Gleiches durch gleiche Zahlen radiziert, giebt Gleiches.

§ 27.

Beispiele:

$$\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5;$$
$$\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4.$$

I. Formel: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

1) **Lehrsatz:** Ein Produkt wird durch eine Zahl radiziert, indem man **jeden** Faktor durch die Zahl radiziert und die erhaltenen Wurzeln miteinander multipliziert.

Beweis. Die Formel ist richtig, wenn $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n$ den Radikanden abgiebt. Nach § 17 Lehrsatz 5 ist:

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab \quad \text{nach Formel II.}$$

Vorstehende Formel lautet rückwärts:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}.$$

In Worten:

2) **Lehrsatz:** Gleichartige Wurzelgrößen werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt ihrer Radikanden durch den Wurzelexponenten radiziert.

Beispiele:

$$\sqrt{144:9}=\sqrt{144}:\sqrt{9}=4;$$

$$\sqrt[3]{216:27}=\sqrt[3]{216}:\sqrt{27}=2.$$

II. Formel: $\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}.$

3) **Lehrsatz:** Ein Quotient wird radiziert, indem man sowohl seinen Dividenden als seinen Divisor radiziert und die erste Wurzel durch die zweite dividiert.

Beweis.

$$(\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n:(\sqrt[n]{b})^n=a:b$$

nach § 17, 7 und Formel II.

Durch Umkehrung der Formel V ergiebt sich der

4) **Lehrsatz:** Gleichartige Wurzeln werden dividiert, indem man den Quotienten des Radikanden durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radiziert.

Beispiele:

$$\sqrt{10^4}=\sqrt{10^{4:2}}=\sqrt{10^2}=10;$$

$$\sqrt[3]{64^6}=64^{6:3}=64^2; \qquad \sqrt[n]{a^{n\cdot c}}=a^c.$$

III. Formel: $\sqrt[n]{a^m}=a^{m:n}.$

5) **Lehrsatz:** Eine Potenz wird radiziert, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert.

Damit der Quotient $m:n$ eine natürliche Zahl bezeichnet, muß m ein Vielfaches von n sein. Die Richtigkeit der Formel folgt unmittelbar aus Formel III.

Beispiele:

$$\sqrt[3]{27^6} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^6 = 3^6; \quad \sqrt{9^4} = \left(\sqrt{9}\right)^4 = 3^4.$$

IV. Formel: $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

6) **Lehrsatz:** Eine Potenz wird radiziert, indem man ihre Grundzahl radiziert und die erhaltene Wurzel mit dem Potenzexponenten potenziert.

Die Formel IV ist richtig, weil:

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m = a^m.$$

Rückwärts gelesen, drückt Formel IV folgendes Gesetz aus:

7) **Lehrsatz:** Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Radikanden mit dem Exponenten potenziert und die erhaltene Potenz radiziert.

Beispiel:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4096}} = \sqrt[6]{4096} = 4.$$

V. Formel: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

8) **Lehrsatz:** Eine Wurzelgröße wird radiziert, indem man den Radikanden durch das Produkt aus Zahl und Wurzelexponent radiziert.

Beweis. Den Ausdruck $\sqrt[m \cdot n]{a}$ mit n potenziert, giebt:

$$\left(\sqrt[m \cdot n]{a}\right)^n = \sqrt[m \cdot n]{a^n} \quad \text{(nach Lehrsatz 7)}$$

$$= \sqrt[m]{a} \quad \text{(gemäß Formel III, § 21).}$$

Die Umkehrung dieser Formel drückt folgende Wahrheit aus:

Lehrsatz: Eine Zahl wird durch ein Produkt radiziert, indem man sie durch die einzelnen Faktoren in beliebiger Ordnung radiziert.

Für das Rechnen mit Wurzeln sind noch folgende der Gleichung:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

entsprechende Formeln von Wichtigkeit:

$$(a + \sqrt{b})\,(a - \sqrt{b}) = a^2 - b\,.$$

$$(\sqrt{a} + b)\,(\sqrt{a} - b) = a - b^2\,.$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})\,(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b\,.$$

Diese Formeln werden besonders angewendet, um Wurzeln aus dem Divisor von Quotienten fortzuschaffen, z. B.:

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})\,(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}\,.$$

§ 28. Zusammenhang der Rechnungsverfahren.

In § 4 ist gezeigt worden, daß die Subtraktion die Umkehrung oder die Inversion der Addition ist. Die erste Operation der Arithmetik hat nur eine inverse Rechnungsart. Dies hat seinen Grund darin, daß nach dem Kommutationsgesetze der Addition die Summanden einer Summe vertauscht werden können. Die dritte Rechnungsart, die Multiplikation, ist ihrem Ursprunge nach nichts anderes als eine verkürzte Addition. Sind nämlich in einem besondern Falle die Teile einer Summe gleich, so geht die Addition in die Multiplikation über. Letztere hat ebenfalls nur ein umgekehrtes Rechnungsverfahren, die Division. Da nämlich die Faktoren eines Produktes miteinander vertauscht werden dürfen, so fließen die beiden Umkehrungen, welche die Multiplikation eigentlich haben müßte, in eine einzige Operation zusammen. Die Potenzierung ist ihrem Wesen nach ein besonderer Fall der Multiplikation. Wenn nämlich die Faktoren eines Produktes gleich sind, so kann das Produkt kürzer durch eine Potenz dargestellt werden. Die Potenzrechnung hat zwei entgegengesetzte Rechnungsarten, nämlich das Wurzelausziehen (Wurzelrechnung) und die Logarithmierung (Logarithmenrechnung). In den Gleichungen:

$$1) \qquad 8^3 = 512 \quad \text{allgemein} \quad a^n = p \cdots \text{I}$$

kommen drei Größen inbetracht, welche in einer solchen Beziehung zu einander stehen, daß mit Hilfe zweier die dritte, unbekannte Größe ermittelt werden kann.

Betrachtet man in den Gleichungen 1) und I die Größen 512 und 3, bezw. p und n als gegeben, die Grundzahl als gesucht und setzt dieselbe gleich x, so wird der Wert für x durch die bekannten Zeichen auf folgende Weise bezeichnet:

$$2) \qquad x = \sqrt[3]{512} = 8; \quad \text{allgemein} \quad x = \sqrt[n]{p} \cdots \text{II}.$$

Erste Umkehrung: Aus dem Potenzwert und dem Exponenten die Grundzahl finden, heißt Radizieren (§ 18).

Nimmt man dagegen in den Gleichungen unter 1) und I 512 und 8, bezw. p und a als bekannte Größen an, den Exponenten als gesucht und bezeichnet dieselben mit x, so wird x durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$3) \qquad x = {}^{8}\log 512; \quad \text{allgemein} \quad x = {}^{a}\log p \cdots \text{III}.$$

(Gelesen: $x = a$-Logarithmus von p.) Nun erhält die Potenz, 512, p, den Namen Numerus, und den Exponenten x nennt man jetzt Logarithmus; der Name Basis wird beibehalten.

Zweite Umkehrung: Man soll aus der Potenz und der Grundzahl den Exponenten (Logarithmus) berechnen, mit welchem man die Basis potenzieren muß, um die Potenz zu erhalten. Dieses Rechnungsverfahren heißt Logarithmieren.

Der Grund, weshalb die Potenzierung zwei umgekehrte Operationen hat, liegt in folgendem. In der Gleichung $a^n = p$ stehen Grundzahl und Exponent in wesentlich verschiedener Beziehung zum Potenzwert p und können daher im allgemeinen (nur in einzelnen Fällen, z. B. $2^4 = 4^2$) nicht miteinander vertauscht werden. Folglich kann die Berechnung der Basis und des Exponenten nicht auf dieselbe Weise vollzogen werden, das Potenzieren muß zwei umgekehrte Rechnungsverfahren haben.

Die sieben Grundrechnungsarten der Arithmetik kann man in zwei Gruppen bringen, in direkte und in indirekte. Direkte Operationen sind Addition, Multiplikation und Potenzierung, die übrigen heißen indirekte. Die Beziehung dieser Zahlverknüpfungen geht aus folgender Zusammenstellung hervor:

Direkte Operationen:	Indirekte:
$a + b = c.$	$a = c - b.$
$a \cdot b = c.$	$a = c : b.$
$a^b = c.$	$a = \sqrt[b]{c}.$
	$b = {}^a\log c.$

Durch die direkten Rechnungsverfahren werden Zahlen zusammengesetzt, durch die indirekten dagegen zergliedert, weshalb die ersteren auch thetische, die andern lytische Operationen genannt werden. Eine Operation, welche aus einer andern hervorgeht, steht hinsichtlich des Ranges um eine Stufe höher als die ursprüngliche Rechnungsart. Da die Multiplikation aus der Addition entsteht (§ 7), so gehört erstere der zweiten Stufe an, und weil das Potenzieren eigentlich ein verkürztes Multiplizieren ist, so ist die Potenzierung eine Operation der dritten Stufe. Jede direkte Operation mit ihren zugehörigen umgekehrten Rechnungsarten nennt man zusammen „Operationen einer Stufe", „gleichstufige Operationen" oder „Rechnungsarten gleichen Ranges". Die in diesem Abschnitt behandelten Verbindungen der natürlichen Zahlen werden auch eindeutige Verknüpfungen genannt, weil sie stets nur ein Resultat für die Rechnung liefern.*)

Der Zusammenhang und die Beziehung der behandelten Grundrechnungsarten der Arithmetik zu einander geht auch aus folgenden Sätzen hervor:

Die Addition ist Hinzufügen gleichartiger (benannter oder unbenannter) Einheiten.

---

*) Da in diesem Abschnitt nur natürliche Zahlen inbetracht kommen, so ist $\sqrt[n]{p}$ vorläufig eindeutig.

Das Subtrahieren besteht im Wegnehmen gleichartiger Einheiten.

Multiplikation ist Addieren gleicher Zahlen (Summanden).

Die Division ist Subtrahieren gleicher Zahlen (Subtrahenden).

Das Potenzieren besteht in der Multiplikation gleicher Zahlen (Faktoren) miteinander. $a \cdot a \cdot a = a^3$.

Das Wurzelausziehen ist Division durch gleiche Zahlen, z. B.: $\sqrt{a^2} = a^2 : a = a$.

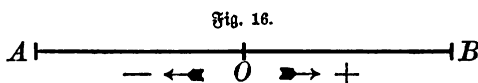
Zweiter Abschnitt.

Erste Erweiterung des Zahlenbegriffs: negative Zahlen.

§ 29. Vorbegriffe.

Die Strecke OB kann man sich auf zweifache Weise entstanden vorstellen, erstens dadurch, daß sich der Punkt O nach B bewegt und zweitens dadurch, daß Punkt B den Weg von B nach O durchläuft. Die Richtung OB ist der Richtung BO entgegengesetzt.

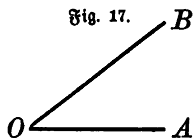
Fig. 16.



Verlängert man die Strecke OB über O, so ist die neue Strecke OA offenbar dadurch entstanden, daß der erzeugende Punkt O sich in einer Richtung bewegt hat, die seiner ursprünglichen Fortbewegung von O bis B entgegengesetzt ist. Wählt man O als Anfangspunkt beider Strecken, so ist klar, daß alle Punkte von OA der Lage nach entgegengesetzt sind den Punkten, die rechts von O auf OB liegen. Beispiele über entgegengesetzte Richtungen liefern die Himmelsgegenden. Reisen zwei Personen, A und B, von demselben Orte auf der Erde ab, die eine, A, nach Norden und die andere, B, nach Süden, so sind die Richtungen ihrer Wege einander entgegengesetzt. Den Gegensatz dieser Richtungen stellt man durch die Zeichen + und — dar. Ist A z. B. 10 Meilen nördlich und B 6 Meilen südlich von Köln entfernt, und setzt man die Richtung nach Norden als die positive fest, so bezeichnet man die Entfernungen beider Personen von Köln durch + 10 Meilen und — 6 Meilen.

Die Entstehung eines Winkels $\widehat{AOB}$ kann man sich so vorstellen, daß der Schenkel OA sich bis in die Lage des festen Schenkels OB bewegt, oder auch, daß der letztere sich um O dreht, bis er in die Lage von OA gelangt. Offenbar sind beide Drehungen dem Sinne nach entgegengesetzt. Nennt man die Drehung im Sinne des Uhrzeigers die positive und bezeichnet sie mit +, so muß man der entgegengesetzten Drehung die Bezeichnung „negativ“ beilegen und sie durch das Zeichen — darstellen.

Fig. 17.



Entgegengesetzte Größen. Die benannte Zahl „10 ℳ“ ist ein absoluter Größenbegriff; „10 ℳ Vermögen“ und „10 ℳ Schulden“ sind relative (bezügliche) Größenbegriffe. Man nennt die Größenbegriffe „Vermögen“ und „Schulden“ in Beziehung aufeinander entgegengesetzte Größen.

Zur Erzeugung eines deutlichen Begriffes von den entgegengesetzten Größen dienen besonders die Kräfte. Wirkt auf einen Körper von der einen Seite eine Kraft von 10 kg, und gleichzeitig eine eben so große Kraft von der entgegengesetzten Seite, so bleibt der Körper in Ruhe. Nennen wir die eine Kraft die positive und bezeichnen sie mit + 10 kg, so ist die andere Kraft die negative und wir stellen sie durch — 10 kg dar. — Auch die Wirkungen der beiden magnetischen Kräfte, des Nord- und des Südmagnetismus, sind einander entgegengesetzt. Wenn man dem Nordpol eines Magnetstabes, der ein Eisenstück trägt, von der nämlichen Seite den Südpol eines andern Magnets von gleicher Stärke nähert, so fällt das Eisenstück zur Erde. Gleichstarke entgegengesetzte Magnetismen heben sich bei ihrer Vereinigung ganz auf, sie vernichten sich gegenseitig. Größen, die bei ihrer Vereinigung sich entweder ganz oder zum Teil aufheben, sich gegenseitig ganz oder zum Teil vernichten, heißen entgegengesetzte Größen. — Zu den letzteren gehören: Gewinn und Verlust; Fortschritt und Rückschritt; Hebung und Senkung; Beschleunigung und Verzögerung; Anziehung und Abstoßung; Einnahme und Ausgabe.

§ 30. Die Null.

Der Begriff der Subtraktion und die Lehrsätze über die Differenz $a - b$ sind ursprünglich unter der Voraussetzung aufgestellt worden, daß der Minuend größer als der Subtrahend ist; denn nur in diesem Falle ist der Rest eine wirkliche, natürliche Zahl. Wenn z. B. $a = 15$, $b = 10$, so ist $a - b = 5$. Sind in einem besondern Falle Minuend und Subtrahend einander gleich, wird z. B. $b = a$ gesetzt, so entsteht die Differenz $a - a$. Führt man in letzterer die Subtraktion aus, so bleiben keine Einheiten übrig. Man stellt das Ergebnis dieser Subtraktion durch das Zeichen 0 dar, welches „Null" ausgesprochen wird. **Null ist das Ergebnis einer Subtraktion, bei welcher Minuend und Subtrahend einander gleich sind.**

Wenn wir die arithmetische Aufgabe 5 — 5 an unserer graphischen Darstellung der natürlichen Zahlenreihe lösen, so müssen wir von dem die Zahl 5 vorstellenden Punkt aus um 5 Schritte rückwärts gehen. Man gelangt alsdann an den Anfangspunkt der Geraden, der die Zahl 0 versinnlicht.

§ 31. Entstehung der negativen Zahlen, geometrisch veranschaulicht.

Die Lösung der Aufgabe 5 — 6 an unserm Zahlenbilde (§ 1) verlangt, daß man vom fünften Punkt der Geraden aus um 6 Schritte (Punkte) rückwärtsschreite. Zunächst ist dies nur um 5 Schritte möglich, nämlich bis zum Nullpunkt. Von letzterem müssen wir nun noch einen Schritt nach links gehen. Um dies wirklich ausführen zu können, ist es nötig, von Null aus einen Punkt in derselben Richtung mit den übrigen Punkten der Zahlenreihe und in gleichem Abstande mit denselben einen neuen Punkt zu setzen. Nunmehr sind wir imstande, die vorliegende Aufgabe zu lösen. Der neue Punkt veranschaulicht durch seine Entfernung vom Anfangspunkt offenbar die Zahl 1. Da aber nach den Erläuterungen unter 1 die Lage des hinzugefügten Punktes der Lage aller Punkte rechts von Null ent-

gegengesetzt ist, und die beiden, die Zahl 1 versinnlichenden Punkte leicht miteinander verwechselt werden könnten, so ist es notwendig, die Verschiedenheit der Lage beider Punkte äußerlich zu kennzeichnen. Dies geschieht nach § 29 dadurch, daß wir der natürlichen Zahl 1 das Zeichen + und der links von Null stehenden 1 das Zeichen — vorsetzen. Mit Hilfe des neuen Zahlzeichens —1 können wir nun die Lösung vorliegender Aufgabe darstellen, es ist 5 — 6 = —1. Das neu entstandene Zahlzeichen —1 nennen wir eine negative Zahl und die frühere natürliche Zahl 1, welche das Vorzeichen + trägt, heißt nun eine positive Zahl. Heißt die Aufgabe 5 — 7, so müssen wir zur Ausführung der Lösung an unserem Zahlenbilde links noch einen Punkt hinzusetzen, der denselben Forderungen entspricht, wie die übrigen Punkte. Konsequent der eingeführten Bezeichnung wird diesem Punkt die Zahl —2 zugeordnet, und im Gegensatze hierzu geht die natürliche Zahl 2 in die positive +2 über. Es ist also 5 — 7 = —2.

Statt von der natürlichen Zahl 5 aus um 6, 7 Einheiten rückwärts zu schreiten, könnte auch verlangt werden, 8, 9, 10, 100, überhaupt eine sehr große Zahl von 5 abzuziehen. Um alle diese Aufgaben bildlich lösen zu können, ist es Bedürfnis, auch links von Null eine unbegrenzte Anzahl von Punkten in derselben Geraden liegend, zu setzen, bezw. sich vorzustellen, und denselben die entsprechenden negativen Zahlen zuzuordnen. Sämtliche Zahlen der natürlichen Zahlenreihe erhalten das Vorzeichen + und sie gehen in positive Zahlen über. Wir erhalten alsdann folgende Abbildung der Zahlen.

$-\infty$ • $+\infty$
−7, −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9,

Diese Darstellung hat Ähnlichkeit mit der Skala eines Thermometers.

§ 32. Rein arithmetische Herleitung der negativen Zahlen.

Ist die Aufgabe 5 — 8 gegeben, so formen wir dieselbe mittels des Lehrsatzes über die Wertbeständigkeit der Differenz so um: (5 — 5) — (8 — 5). Nun ist 5 — 5 = 0 und 8 — 5

$= 3$; folglich $5 - 8 = 0 - 3$. Indem wir also die Zahl 8 von 5 subtrahieren, erhalten wir eine Differenz, deren Minuend Null und deren Subtrahend eine natürliche Zahl ist. Wenn in der allgemeinen Differenz $a - b$ der Subtrahend größer als der Minuend ist, also etwa $b = a + n$, so ist

$$a - b = a - (a + n) = (a - a) - n = 0 - n.$$

Differenzen von der Form $0 - n$ nennt man **negative Zahlen**. Da alle Zahlen dieser Art denselben Minuenden, Null, haben, sich also nur durch ihren Subtrahenden unterscheiden, so läßt man in der Regel den Minuenden fort und schreibt nur den Subtrahenden mit dem Vorzeichen —. **Eine negative Zahl ist das Ergebnis einer Subtraktion, bei welcher der Subtrahend größer als der Minuend ist.**

Die allgemeine Arithmetik zieht also größere Zahlen von kleineren ab, und es tritt dadurch die **Notwendigkeit** ein, das Zahlengebiet über die ursprüngliche Grenze, Null, hinaus um eine unendliche Reihe von Einheiten zu erweitern. Da aber diese Zahlenreihe und die ursprüngliche mit Rücksicht auf ihren gemeinschaftlichen Ausgangs- und Mittelpunkt — die Null — und ihrem Charakter nach im **Gegensatz** zu einander stehen, so nennt man nunmehr unsere natürliche Zahlenreihe die **positive** und die neu erhaltene die **negative** Zahlenreihe. Die negativen Zahlen sind aus der **negativen Einheit** gebildet, so ist z. B. $(-3) = (-1) + (-1) + (-1)$. Dagegen besteht die positive Zahl aus **positiven Einheiten**; es ist z. B. $(+3) = (+1) + (+1) + (+1)$. Durch das Gebiet der negativen Zahlenreihe wird also die Grenze, welche die natürliche Zahlenreihe nach der einen Seite durch die Null hatte, beseitigt. Die Null bildet, wie bereits gesagt, den Ausgangs- und Mittelpunkt beider Zahlengebiete, in ihr verschwindet jeder Zahlenunterschied, Null kann sowohl positiv als negativ genommen werden, es ist $+0 = -0$. Aus der **Entstehung** der negativen Zahlen ergiebt sich, daß dieselben, absolut betrachtet, sämtlich kleiner als Null sind. Dagegen sind die positiven Zahlen größer als Null und folglich auch größer als jede negative Zahl.

Eine Zahl der positiven Reihe ist um so größer, je weiter sie im Zahlenbilde von 0 entfernt ist. Hingegen ist eine Zahl auf der negativen Hälfte der Geraden um so größer, je näher sie dem Nullpunkte liegt. Von zwei negativen Zahlen ist also diejenige die größere, die im Zahlenbilde den geringsten Abstand von Null hat. So ist z. B. (— 1) größer als (— 12). Ohne Beziehung auf die versinnlichte Zahlenreihe drückt man diese Wahrheiten häufig allgemein so aus: Irgend eine Zahl der allgemeinen (erweiterten) Zahlenreihe heißt größer als eine andere, wenn man zu letzterer eine positive Zahl addieren muß, um die erstere zu erhalten.

Aus der bildlichen Darstellung ist ersichtlich, daß man nicht bloß von der Null, sondern überhaupt von jeder Zahl aus durch Vorwärts- bezw. durch Rückwärtsschreiten in das entgegengesetzte Zahlengebiet gelangen kann. Aus diesem Grunde bezeichnet man beide Zahlenreihen mit dem gemeinschaftlichen Namen relative (bezügliche) Zahlen, und nennt im Gegensatz hierzu die ursprüngliche, natürliche Zahlenreihe, von der wir ausgingen, die absolute Zahlenreihe. Da die positiven und negativen Zahlen Gegenstand der Algebra sind, so heißen sie auch algebraische Zahlen. Und weil dieselben ihrem Begriffe nach im Verhältnisse des Gegensatzes zu einander stehen, so nennt man sie auch entgegengesetzte Zahlgrößen. Zur Bezeichnung derselben dienen, wie bekannt, die Operationszeichen + und —. Letztere heißen aber, wenn sie zur Bezeichnung der Art (Qualität) der Zahl verwendet werden, Qualitäts- oder Vorzeichen. Zahl und Vorzeichen werden häufig eingeklammert, um die Art der Zahl deutlich hervorzuheben. Zahlen mit gleichen Vorzeichen heißen gleichartige Zahlen. Den negativen Zahlen setzt man das Minuszeichen vor, weil die Subtraktion zur Entstehung derselben geführt hat; das Vorzeichen der positiven Zahlen kann dagegen wegbleiben.

Wie bereits erwähnt worden ist, erstreckte sich der ursprüngliche Subtraktionsbegriff nur auf solche Differenzen, deren Minuend größer als der Subtrahend ist. Die allgemeine Differenz $a - b$ hatte nur für den Fall eine Bedeutung, daß

a größer als b war. Die Anwendung der Buchstaben als allgemeiner Zahlzeichen, das Bedürfnis, die arithmetischen Gesetze allgemein anzuwenden, forderte notwendig die Beseitigung jener Einschränkung $a > b$, verlangte eine Erweiterung des Zahlenbegriffs, und führte zur Einführung der Null und der negativen Zahlen in die Arithmetik. Diese unterwirft diese neuen Zahlzeichen denselben Gesetzen, die für die natürlichen (absoluten) Zahlen gelten, und nennt erstere deshalb auch schlechtweg „Zahlen". Und wie man ursprünglich unter der Differenz $a - b$ die Zahl versteht, die zu b addiert, a giebt, so hat man die Zahlenverbindung $6 - 10$ so zu deuten, daß man für $(6 - 10) + 10$ die Zahl 6 setzen will.

In der allgemeinen Differenz $a - b$ sind mithin drei besondere Zahlformen enthalten: 1) die positive Zahl, wenn a größer als b ist; 2) die Null, wenn $b = a$ und 3) die negative Zahl, falls a kleiner als b ist. Die allgemeine Differenz $a - b$ hat also nach Kenntnis der Null und der negativen Zahlen in allen Fällen eine Bedeutung.

Ein allgemeines Zahlzeichen kann an und für sich, ohne Vorzeichen, jede Zahl der relativen Zahlenreihe bezeichnen. In den Gleichungen:

$$1)\quad x + 2 = 10; \qquad 2)\quad x + 18 = 10$$

hat das Zeichen x die Werte:

$$1)\quad x = +8 \quad \text{und} \quad 2)\quad x = (-8).$$

Da nun das Vorzeichen + vor einer Zahlgröße bedeutet, daß dieselbe im ursprünglichen oder direkten Sinne gesetzt werden soll, das Zeichen − dagegen ausdrückt, daß die mit ihr behaftete Zahl in entgegengesetztem Sinne aufzufassen ist, so muß konsequent dieser Bezeichnung, wenn:

$$1)\quad x = (+8) \quad \text{ist,}$$

auch $+x = +(+8)$ und $-x = -(+8)$

und falls $2)\quad x = (-8)$ ist,

auch $+x = +(-8)$ und $-x = -(-8)$ sein.

Da nun aber $+x$ und $-x$ in jedem Falle einander ent-

gegengesetzte Größen darstellen, so ergeben sich hieraus folgende Beziehungen:

1) $+(+8) = +8$ und $-(+8) = -8$;

2) $+(-8) = -8$ und $-(-8) = +8$.

§ 33. Anwendung der algebraischen Zahlen.

Größen an sich, z. B. Strecken, können weder positiv noch negativ sein. Sowohl die positiven als die negativen Zahlen kommen für sich allein nicht vor. Beide Arten von Zahlen sind vielmehr nur in Beziehung aufeinander denkbar. Dies liegt im Wesen der entgegengesetzten Zahlen. Algebraische Zahlen können nur da inbetracht kommen, wo nicht für sich denkbare Dinge, sondern die Beziehung derselben zu einander das Gezählte sind, „wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, das mit ihm vereinigt gedacht, der Vernichtung gleichkommt" (Gauß), also auch bei den entgegengesetzten Größen. (Siehe S. 91.) Daher bezeichnen wir z. B. 15 Grad Wärme an der Skala von Réaumur mit $+15^0$ R und 6 Grad Kälte durch -6^0 R. Zwei Kräfte, die in entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper mit den Intensitäten w_1 und w_2 wirken, stellen wir durch $+w_1$ und $-w_2$ dar. — Liegt ein Ort A 25 Meilen nördlich, ein anderer 10 Meilen südlich von Köln und wir bezeichnen die Entfernung des Ortes A von Köln durch + 25 Meilen, so müssen wir mit Rücksicht auf den Gegensatz der Lagen den Abstand des Ortes B von Köln durch „— 10 Meilen" ausdrücken. Die christliche Zeitrechnung beginnt mit Christi Geburt. Die Zeiträume vor und die Zeiträume nach diesem Anfangspunkt wachsen in entgegengesetztem Sinne. Daher kann man mit Rücksicht auf diesen gemeinschaftlichen Anfangspunkt die Zahl der Jahre nach Christus mit + und die Zahl der Jahre vor Christus mit — bezeichnen.

Die sechs Grundrechnungen mit algebraischen Zahlen.

I. Addition.

§ 34. Addition in gleichem Sinne: die Summanden sind gleichartige Zahlen.

a) Die Addition kann in gleichem und in entgegengesetztem Sinne ausgeführt werden. Soll das Addieren in demselben Sinne geschehen, so haben die Summanden gleiche Vorzeichen, im andern Falle sind die Vorzeichen verschieden.

Reist A von Köln aus zuerst 6 Meilen und hierauf 4 Meilen in nördlicher Richtung, so ist er 10 Meilen nördlich von Köln entfernt. Sehen wir die Richtung nach Norden als die positive an, so stellen wir das Ergebnis auf folgende Weise dar:

$$(+6) + (+4) = (+10).$$

Die arithmetische Aufgabe $(+12) + (+8)$ auf unser Zahlenbild übertragen, hat folgenden Sinn: Man soll von dem Punkt aus, der die Zahl $+12$ versinnlicht, um 8 Strecken (Punkte) im positiven Sinne fortschreiten. Wir gelangen alsdann an den die Zahl $+20$ darstellenden Punkt der Geraden; mithin ist:

$$(+12) + (+8) = (+20).$$

In allgemeinen Zahlen:

$$(+a) + (+b) = +(a+b).$$

Wenn B von Köln aus zuerst 5 Meilen und dann noch 7 Meilen in südlicher Richtung reist, so befindet er sich 12 Meilen südlich von Köln. Bezeichnen wir die Richtung von Köln nach Süden mit —, so ist:

$$(-5) + (-7) = (-12).$$

Lösen wir die Aufgabe $(-8) + (-6)$ mit Hilfe unsers Zahlenbildes, so müssen wir vom achten Punkt auf der negativen Hälfte der Geraden aus um 6 Längen im negativen Sinne fortschreiten. Da wir an den Punkt gelangen, der die Zahl -14 versinnlicht, so ist:

$$(-8) + (-6) = (-14).$$

Geht man von Null aus auf dem negativen Teile zuerst um

a und hierauf um b Strecken (Punkte) weiter, so hat man sich um $a + b$ Strecken vom Nullpunkte entfernt. Da die Längen links von Null mit dem Vorzeichen — versehen werden müssen, so ist:
$$(-a) + (-b) = -(a + b).$$

Lehrsatz: Gleichartige Zahlen werden addiert, indem man ihre absoluten Zahlenwerte addiert und der erhaltenen Summe das Vorzeichen der Summanden giebt.

Aus den erläuterten Beispielen ergiebt sich: Sind die zu addierenden Zahlen gleichartig, so muß man bei der bildlichen Lösung von dem den ersten Summanden darstellenden Punkt aus in derselben Richtung fortschreiten, die eingeschlagen werden muß, um von Null aus an den betreffenden Punkt zu gelangen. Auf der positiven Hälfte der Geraden geschieht also (in vorliegendem Falle) das Fortschreiten in der Richtung von 0 nach $+\infty$ und auf der negativen Hälfte in der Richtung von 0 nach $-\infty$.

§ 35. **Addition in entgegengesetztem Sinne: die Summanden haben entgegengesetzte Vorzeichen.**

Reist A von Berlin aus 12 Meilen in nördlicher und hierauf 8 Meilen in entgegengesetzter Richtung, so befindet er sich 4 Meilen nördlich von Berlin. In Zeichen:
$$(+12) + (-8) = +4.$$
Die Aufgabe $(+6) + (-15)$ auf unser Zahlenbild übertragen, bedeutet: Schreite von Null aus auf der positiven Hälfte der Geraden um 6 Punkte vorwärts und darauf von dem Ziele aus um 15 Punkte in entgegengesetzter Richtung. Da man sich nun 9 Schritte von Null entfernt auf der negativen Hälfte befindet, so ist:
$$(+6) + (-15) = (-9).$$
Erläuterung der Aufgabe $(-6) + (+15)$: Schreitet man von Null aus auf der negativen Hälfte um 6 Längen vorwärts und von dem erhaltenen Punkt aus in entgegengesetztem Sinne um 15 Längen weiter, so ist man 9 Längen rechts vom Anfangspunkt entfernt.

In allgemeinen Zahlen:

$$(+a) + (-b) = +(a-b), \quad \text{wenn} \quad a > b.$$
$$(+a) + (-b) = -(b-a), \quad \text{wenn} \quad b > a.$$

Lehrsatz: Algebraische Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen werden addiert, indem man die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert und dem erhaltenen Rest das Vorzeichen der größeren Zahl giebt.

Aus den gelösten Beispielen folgt: Haben die zu addierenden Zahlen entgegengesetzte Vorzeichen, so muß man bei der Lösung am Zahlenbilde von dem den ersten Summanden veranschaulichenden Punkt aus in entgegengesetzter Richtung, also nach dem Nullpunkte hin, fortschreiten.

Bei der praktischen Vereinigung ungleichartiger Zahlen wendet man zweckmäßig das sogenannte „Ergänzen" an.

b) An Stelle der vorhergehenden Behandlung kann auch die folgende treten. Die Addition kann im positiven und im negativen Sinne vollzogen werden. Den positiven Charakter der Addition zeigt man durch Vorsetzen des Zeichens + vor die zu addierende Zahl an, während das Addieren im entgegengesetzten Sinne durch Vorsetzen des Zeichens — vor den zweiten Summanden bezeichnet wird.

1) Addition in positivem Sinne: α) beide Summanden sind positiv, z. B. $(+15) + (+7)$; β) der erste Summand ist negativ, der zu addierende positiv, z. B. $(-15) + (+7)$. Erläuterung der Aufgabe $(+15) + (+7)$ am Zahlenbilde: Schreite von dem die Zahl $(+15)$ vorstellenden Punkt aus um 7 Strecken im positiven Sinne weiter. Die Aufgabe $(-15) + (+7)$ bedeutet: Gehe von dem Punkte, der die Zahl -15 versinnlicht, aus 7 Schritte im positiven Sinne weiter.

2) Addition im negativen Sinne: α) der zweite Summand ist negativ, z. B. $(+12) + (-6)$; β) beide Summanden sind negativ, z. B. $(-12) + (-6)$. Die erste Aufgabe bedeutet: Man soll von dem die Zahl $(+12)$ vorstellenden Punkt aus 6 Längen im negativen Sinne fort-

schreiten. Die bildliche Auflösung der zweiten Aufgabe verlangt, daß man von dem Punkt aus, welchem die Zahl (— 12) zugeordnet ist, 6 Schritte im negativen Sinne weiterschreite.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß man stets dieselbe Antwort erhält, wenn man die beiden Summanden vertauscht. Das Grundgesetz für die Addition der natürlichen Zahlen ist also auch für algebraische Zahlen gültig.

Das Addieren algebraischer Zahlen nennt man algebraische Addition. Aus dem letzten Lehrsatze ergiebt sich ein wesentlicher Unterschied des Addierens entgegengesetzter algebraischer Zahlen von der Addition der natürlichen Zahlen (§ 2). Für das Addieren ungleichartiger algebraischer Zahlen sind die im ersten Abschnitt § 2 gegebenen Erklärungen der Addition nicht gültig; denn die Summe algebraischer Zahlen ist kleiner als einzelne Summanden. Die früher aufgestellten Begriffserklärungen haben die natürlichen Zahlen, also die Gleichartigkeit der durch + verbundenen Glieder, zur Voraussetzung. Soll der Begriff der Addition auch für die Verknüpfung positiver und negativer Zahlen zutreffend sein, so müssen wir den Umfang desselben erweitern. Wir fassen daher den Begriff der Addition in größerer Allgemeinheit als die Vereinigung mehrerer verknüpfter Zahlen zu einem Ganzen, bei dessen Bildung die Gleichartigkeit und der Gegensatz seiner Teile inbetracht zu ziehen ist. Algebraisch addieren heißt dasjenige Ganze, die **algebraische Summe** (§ 43) suchen, deren sämtliche Teile die Summanden sind.

II. Subtraktion.

§ 36. Subtraktion in gleichem Sinne: Minuend und Subtrahend sind gleichartige Zahlen.

a) Wie bei der Addition, so ist auch hier eine Subtraktion in gleichem und in entgegengesetztem Sinne zu unterscheiden. Die erste Art der Subtraktion findet Anwendung, wenn Minuend und Subtrahend mit gleichem Vorzeichen behaftet, also gleichartige Zahlen sind, während diese Operation

in entgegengesetztem Sinne bei Verschiedenheit der Vorzeichen vollzogen wird.

Da die Subtraktion die der Addition entgegengesetzte Rechnungsart ist, so muß bei Lösung von Aufgaben der Subtraktion am Zahlenbilde das dem Addieren entgegengesetzte Verfahren eingeschlagen werden. Entsprechend den Aufgaben der Addition werden auch hier die Beispiele unterschieden.

a) Minuend und Subtrahend sind positiv.

Da man bei der bildlichen Ausführung der Addition positiver Zahlen in der Richtung von 0 nach $+\infty$ auf der positiven Hälfte der Geraden fortschreitet, so muß man bei der Subtraktion positiver Zahlen in entgegengesetztem Sinne, in der Richtung von $+\infty$ nach 0 hin, fortgehen, also rückwärts schreiten. Der Sinn der Aufgabe $(+12)-(+8)$ ist also, man soll von dem die Zahl $(+12)$ darstellenden Punkt aus um 8 Strecken rückwärts gehen. Da man den die Zahl $(+4)$ vorstellenden Punkt erhält, so ist $(+12)-(+8)=(+4)$. Ist der Subtrahend größer als der Minuend, so ist das Ergebnis eine negative Zahl, z. B.:

$$(+12)-(+15)=(-3).$$

Zu demselben Resultat gelangen wir durch folgende Betrachtung. Die positive Hälfte der Geraden bezeichne die nördliche und die negative Hälfte die südliche Richtung. A befinde sich im Nullpunkt, B habe seinen Standpunkt 12 Schritte von A in nördlicher Richtung. Geht nun A 15 Schritte nach Norden, so ist der Standpunkt des B 3 Schritte südlich von A.

In allgemeinen Zahlen:

$$(+a)-(+b)=+(a-b), \quad \text{wenn} \quad a>b.$$
$$(+a)-(+b)=-(b-a), \quad \text{wenn} \quad b>a.$$

Die Subtraktion einer positiven von einer positiven Zahl fließt also mit der Addition der entgegengesetzten Zahl (§ 35) in eine einzige Operation zusammen.

b) Minuend und Subtrahend sind negativ.

Da die Addition zweier negativen Zahlen an unserm Zahlenbilde durch ein Fortschreiten in der Richtung von 0 bis $-\infty$ bewerkstelligt wird, so muß die Subtraktion solcher Zahlen durch Fortgehen in entgegengesetzter Richtung, also von $-\infty$ nach 0 hin, ausgeführt werden. Es ist daher:

$$(-24)-(-16)=(-8).$$

Wenn der absolute Zahlenwert des Minuenden größer als die absolute Zahl des Subtrahenden ist, so bleibt man beim Rückwärtsschreiten auf der negativen Hälfte, d. h. die Differenz ist eine negative Zahl. Dagegen ist:

$$(-24)-(-30)=(+6).$$

Das Ergebnis der Subtraktion liefert eine positive Zahl, wenn der absolute Zahlenwert des Subtrahenden größer als die dem Minuenden entsprechende absolute Zahl ist. Wie man ersieht, fällt die Subtraktion mit dem Verfahren bei der Addition in § 35 zusammen. Es ist einerlei, ob man von einer negativen Zahl eine andere negative Zahl subtrahiert, oder die dem Subtrahenden entgegengesetzte Zahl zum Minuenden addiert.

In Zeichen:

$$(-24)-(-16)=(-24)+(+16)$$

und $$(-24)-(-30)=(-24)+(+30).$$

Die gegebenen Beispiele können auch durch folgende Veranschaulichung gelöst werden. Reist A von Köln aus 24 Meilen und B 16 Meilen in südlicher Richtung, so ist A 8 Meilen südlich von B. Da diese Beziehung arithmetisch durch -8 Meilen bezeichnet wird, so ist:

$$(-24)-(-16)=(-8).$$

Zu demselben Ergebnis gelangen wir, wenn A zuerst 24 Meilen nach Süden und hierauf 16 Meilen in entgegengesetzter Richtung, also nach Norden, reiste. Aufgabe: $(-24)-(-30)$. B befinde sich in München und A sei 24 Meilen südlich von dieser Stadt. Reist nun B 30 Meilen in südlicher Richtung, so befindet A sich 6 Meilen nördlich von B. Dasselbe Resultat würde sich ergeben, wenn B in München bliebe und A 30 Meilen nach Norden reiste.

In allgemeinen Zahlen:

$$(-a)-(-b)=(-a)+(+b).$$

§ 37. Subtraktion in entgegengesetztem Sinne: Minuend und Subtrahend haben entgegengesetzte Vorzeichen.

a) Der Minuend ist eine positive, der Subtrahend eine negative Zahl.

Das Verfahren zur Auflösung von Beispielen dieser Art ist dem Verfahren bei der Addition in § 35 entgegengesetzt. Bei der Auflösung der Aufgabe $(+24)-(-16)$ am Zahlenbilde müssen wir also von dem die Zahl $(+24)$ vorstellenden Punkt aus in der Richtung von 0 nach $+\infty$ hin um 16 Strecken fortschreiten. Da man an dem die Zahl $(+40)$ versinnlichenden Punkt der positiven Hälfte der Geraden anlangt, so ist: $(+24)-(-16)=(+40)$.
Hieraus ergiebt sich, daß die Ausführung der Subtraktion einer negativen Zahl von einer positiven mit dem Verfahren bei Addition positiver Zahlen übereinstimmt. (Siehe Addition in § 34.) Die Subtraktion einer negativen Zahl geht in die Addition der entgegengesetzten Zahl über.

Zu demselben Ergebnis gelangen wir durch folgende anschauliche Darlegung. Befindet sich A in Köln und B reist von dieser Stadt aus 24 km nach Norden, so wird das Ziel des B mit Beziehung auf Köln oder die Person A offenbar durch + 24 km bezeichnet. Reist nun A 16 km in südlicher Richtung (bezeichnet durch — 16 km), so ist B offenbar:

$$(24\,\text{km} + 16\,\text{km} =)\ 40\,\text{km}$$

nördlich von A, was arithmetisch durch + 40 km ausgedrückt wird. Folglich ist:

$$(+24)-(-16)=(+40).$$

Dieselbe Antwort erhalten wir, wenn B noch 16 km nach Norden reist, statt daß A sich um dieselbe Anzahl km in südlicher Richtung von Köln entfernt.

In allgemeinen Zahlen:

$$a-(-b)=+(a+b).$$

b) Der Minuend ist negativ, der Subtrahend positiv.

Die Subtraktionsaufgaben dieser Art entsprechen den Aufgaben des Addierens, in welchen die Summe negativ und die addierte Zahl positiv ist. Aus der Aufgabe:

$$(-12) + (+4)$$

wird folgende Aufgabe der Subtraktion hergeleitet:

$$(-8) - (+4).$$

Nach den Erläuterungen unter § 35 (Seite 100) wird die Lösung der ersten Aufgabe im bildlichen Sinne ausgeführt, indem man auf der negativen Hälfte der Geraden nach dem Nullpunkte hin fortschreitet. Da die Subtraktion die Umkehrung der Addition bildet, so muß man bei Lösung der in der Überschrift bezeichneten Aufgaben auf der negativen Hälfte in der Richtung von 0 nach $-\infty$ hin fortgehen. Wir erhalten also die Differenz der Aufgabe $(-8) - (+4)$, indem wir von dem die Zahl (-8) veranschaulichenden Punkt aus um 4 Längen nach $-\infty$ hin schreiten. Da wir den mit der Zahl (-12) versehenen Punkt erhalten, so ist:

$$(-8) - (+4) = (-12).$$

Erläuterung der Aufgabe $(-24) - (+16)$. Reist A von einem bestimmten Orte aus 24 km nach Süden (bezeichnet durch -24 km), und B von demselben Orte aus 16 km nach Norden (dargestellt durch $+16$ km), so befindet sich A:

$$(24\,\text{km} + 16\,\text{km} =)\ 40\,\text{km}$$

südlich von B. Dieses Resultat wird aber arithmetisch durch -40 km bezeichnet und mithin ist:

$$(-24) - (+16) = (-40).$$

In allgemeinen Zahlen:

$$(-a) - (+b) = -(a + b).$$

Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß die Subtraktion einer positiven von einer negativen Zahl am Zahlenbilde dem Verfahren bei der Addition zweier negativen Zahlen gleich ist.

Man kann daher die Subtraktion einer positiven von einer negativen Zahl durch Addition des entgegengesetzten Subtrahenden ersetzen.

Gemäß den bei Behandlung der verschiedenen Aufgaben des Subtrahierens durch Sperrdruck hervorgehobenen Bemerkungen (§ 36, a und b), fällt das Verfahren bei der Subtraktion einer algebraischen Zahl stets mit der Addition des entgegengesetzten Subtrahenden zusammen. Man drückt daher in der Regel das Subtrahieren einer algebraischen Zahl durch folgendes einfache Gesetz aus: Eine algebraische Zahl wird subtrahiert, indem man sie mit entgegengesetztem Vorzeichen zum Minuenden addiert.

b) Wir lassen hier die Behandlung der Subtraktion folgen, welche der Addition unter b § 35 entspricht. Mit Rücksicht auf das Vorzeichen des Subtrahenden, + oder —, kann man eine Subtraktion im positiven und im negativen Sinne unterscheiden. Als die Umkehrung der Addition muß die Subtraktion am Zahlenbilde durch die bei den entsprechenden Aufgaben der Addition bezeichnete entgegengesetzte Bewegung auf der Geraden vollzogen werden.

1) Subtraktion im positiven Sinne: der Subtrahend ist positiv.

Nach § 35, b, 1 wird die Addition im positiven Sinne auf beiden Teilen der Geraden durch ein Fortschreiten im positiven Sinne, nämlich in der Richtung von 0 nach $+\infty$ hin, ausgeführt. Folglich muß die Subtraktion in positivem Sinne durch Rückwärtsschreiten auf der positiven, bezw. durch Vorwärtsschreiten auf der negativen Hälfte der Geraden bewerkstelligt werden. Es ist daher:

$$(+8)-(+6)=(+2);\quad (+8)-(+12)=(-4);$$
$$(-6)-(+4)=(-10).$$

2) Subtraktion im negativen Sinne: der Subtrahend ist negativ.

Die Addition im negativen Sinne ist nach § 35, b, 2 ein Rückwärtsschreiten auf der positiven, bezw. ein Vorwärtsschreiten auf der negativen Hälfte. Mithin muß die Subtraktion im negativen Sinne durch Fortschreiten nach $+\infty$ hin, also in der positiven Richtung, vollzogen werden. Folglich ist:

$$(+8)-(-6)=(+14) \quad \text{und} \quad (-12)-(-20)=(+8).$$

III. Multiplikation.

§ 38.

Beim Multiplizieren zweier algebraischen Zahlen kommen vier Fälle inbetracht.

1) Multiplikator und Multiplikand sind positiv.

Da der Multiplikator seinem Begriffe gemäß eine natürliche reine Zahl ist (§ 8, 3), so kann derselbe streng genommen weder positiv noch negativ sein.

Aufgabe: $(+3) \cdot (+4)$. Auf unsere graphische Darstellung der Zahlenreihen übertragen, hat die Aufgabe folgenden Sinn: Man soll von Null aus auf der positiven Hälfte der Geraden 3mal um 4 Strecken fortschreiten. Da man den mit $(+12)$ versehenen Punkt erhält, so ist:

$$(+3) \cdot (+4) = (+12).$$

In allgemeinen Zahlen:

$$(+a) \cdot (+b) = (+ab).$$

2) Der Multiplikand ist negativ, der Multiplikator positiv.

Die Aufgabe $(+3) \cdot (-4)$ bedeutet: Schreite von Null aus auf der negativen Hälfte 3mal um 4 Strecken fort. Man gelangt dadurch an den mit (-12) bezeichneten Punkt der Geraden; mithin ist:

$$(+3) \cdot (-4) = (-12).$$

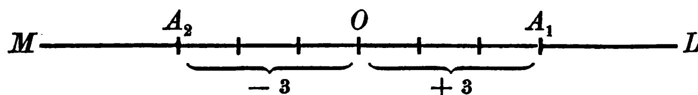
Allgemein ist:

$$(+a) \cdot (-b) = (-ab).$$

3) Der Multiplikand ist positiv, der Multiplikator negativ.

Vorbereitung zur folgenden Aufgabe. Setzt man auf einer unbegrenzten Geraden ML die Richtung OL als die

Fig. 18.



positive fest, so wird die entgegengesetzte Richtung OM

mit — bezeichnet (§ 29). Trägt man nun von O aus nach entgegengesetzten Richtungen gleiche Strecken $OA_1 = OA_2$ ab, so wird die Lage des Punktes A_1 durch $+OA_1$, dagegen die Lage von OA_2 durch $-OA_2$ dargestellt. Die Übertragung des Punktes A_1 in die entgegengesetzte Richtung OM bezeichnet man also arithmetisch durch **Vorsetzung des Minuszeichens**, oder, wie es auch aufgefaßt werden kann, durch **Vorsetzung des Faktors** (-1), so daß $OA_2 = (-1) \cdot OA_1$ ist. Wir verstehen nämlich unter dem Ausdruck $(-1) \cdot OA_1$ das Produkt $1 \cdot OA_1$ mit dem Vorzeichen — und das ist gleich $-OA_1$. Versinnlicht nun Punkt A_1 die Zahl $+3$, so veranschaulicht Punkt A_2 die Zahl (-3), und nach der vorigen Gleichung ist $(-3) = (-1) \cdot +3$, oder allgemein:

$$(-a) = (-1) \cdot (+a).$$

Diese Gleichung ist auch offenbar in der **Umkehrung** richtig, also:

$$(-1) \cdot (+a) = -(1 \cdot +a) = -a.$$

Der Faktor (-1) hat also den Charakter, daß er jede Zahl der positiven Halbaxe OL auf den negativen Teil OM der Geraden ML überträgt. Und weil der Faktor (-1) eine Zahl, welche der positiven Richtung OL angehört, auf die entgegengesetzte Richtung OM versetzt, so nennen wir diesen Faktor einen **Richtungsfaktor**. Wird eine positive Zahl $(+a)$ mit (-1) multipliziert, so muß man zu der entsprechenden Zahl der negativen Zahlenreihe übergehen, d. h. derjenigen negativen Zahl, welche absolut gedacht, a Einheiten enthält. Definition: **Eine positive Zahl $(+a)$ mit (-1) multiplizieren heißt, vom Nullpunkt der Geraden ML aus 1mal um a Einheiten in der negativen Richtung fortschreiten.**

Hiernach ist der Sinn der Aufgabe $(-3) \cdot (+4)$ folgender: Man soll von Null aus in der der positiven **entgegengesetzten** Richtung, also auf dem negativen Teile der Geraden, 3mal um 4 Strecken fortgehen. Da man den die Zahl (-12) versinnlichenden Punkt erhält, so ist:

$$(-3) \cdot (+4) = (-12).$$

In allgemeinen Zeichen:

$$(-a) \cdot (+b) = (-ab).$$

4) **Multiplikand und Multiplikator sind negativ.**

Nach den vorigen Erörterungen und nach § 32 (letzter Absatz) ist $-OA_2 = +OA_1$, oder wenn man statt der Strecken die versinnlichten Zahlenwerte setzt: $-(-3) = +3$. Mit konsequenter Befolgung der vorigen Bezeichnung hat man:

$$(-1) \cdot (-3) = +3$$

oder allgemein:

$$(-1) \cdot (-a) = +a.$$

Eine negative Zahl $(-a)$ *mit* (-1) *multiplizieren heißt, vom Nullpunkt aus auf der positiven Richtung* OL *1mal um* a *Einheiten fortschreiten.**)

Die Aufgabe $(-3) \cdot (-4)$ bedeutet: Schreite vom Anfangspunkt aus 3mal um 4 Strecken in der der negativen entgegengesetzten Richtung, also auf dem positiven Teile der Geraden, fort. Man gelangt an den die Zahl 12 darstellenden Punkt der positiven Zahlenreihe; mithin ist:

$$(-3) \cdot (-4) = (+12).$$

In allgemeinen Zahlen:

$$(-a) \cdot (-b) = (+ab).$$

Aus den unter 1 bis 4 abgeleiteten Formeln ergiebt sich für die Multiplikation algebraischer Zahlen folgende Definition: *Mit einer positiven oder negativen Zahl die Multiplikation vollziehen heißt, den Multiplikanden mit der absoluten Zahl des Multiplikators multiplizieren und das Produkt positiv oder negativ setzen.*

---

*) Eine positive oder negative Zahl mit (-1) multiplizieren heißt, den Multiplikanden auf die *entgegengesetzte* Halbaxe versetzen. Die Übertragung einer Zahl auf den *entgegengesetzten* Teil der Geraden kann durch eine Drehung der die Zahl versinnlichenden Strecke um einen Winkel von 180° in der Ebene (halbe Umdrehung) versinnlicht werden. Das arithmetische Zeichen für die *ganze* Umdrehung einer Strecke um den Nullpunkt ist $(-1) \cdot (-1) = (-1)^2$. Da nun $(-1) \cdot (+1) = (-1)$, so muß $(-1) \cdot (-1) = (+1)$ sein. Der Richtungs- oder Drehungsfaktor für die ganze Umdrehung in der Ebene ist also $(+1)$.

Rein arithmetische Erläuterung der vier Formeln.

1) $(+a) \cdot (+b)$ bedeutet $a \cdot (+b)$ mit positivem Vorzeichen,
$$= +(+ab) = +ab.$$

2) $(+a) \cdot (-b)$ heißt $a \cdot (-b)$ mit positivem Vorzeichen,
$$= +(-ab) = -ab.$$

3) $(-a) \cdot (+b)$ bedeutet $a \cdot (+b)$ mit negativem Vorzeichen,
$$= -(+ab) = -ab.$$

4) $(-a) \cdot (-b)$ heißt $a \cdot (-b)$ mit negativem Vorzeichen,
$$= -(-ab) = +ab. \quad (\S\ 32 \text{ am Schlusse.})$$

Hauptgesetze: 1) Das Produkt zweier gleichartigen Zahlen ist positiv, das Produkt aus zwei ungleichartigen Zahlen ist negativ. 2) Ein Produkt ist positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der negativen Faktoren gerade oder ungerade ist.

IV. Division.

§ 39.

Die Gesetze, welche beim Teilen algebraischer Zahlen zu befolgen sind, werden aus den vorstehenden Formeln abgeleitet. Da die Division die der Multiplikation entgegengesetzte Rechnungsart ist, so ergeben sich folgende Gleichungen:

1) $(+ab):(+a) = (+b)$; 2) $(+ab):(-a) = (-b)$;
3) $(-ab):(+a) = (-b)$; 4) $(-ab):(-a) = (+b)$.

Hauptgesetz: Haben Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, so ist ihr Quotient positiv, bei entgegengesetzten Vorzeichen dagegen negativ.

Anmerkung. Zwischen unserer bildlichen Darstellung der relativen Zahlenreihe und den Punkten einer Geraden besteht eine enge Beziehung, eine innere Verwandtschaft. Bezeichnet man die Abstände der Punkte A, B, C, D einer Geraden von einem beliebigen Punkte (Anfangspunkte) mit x, x_1, x_2, x_3, so ist stets:
$$(x_1 - x) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = x_3 - x.$$

Dasselbe Gesetz gilt auch für die Zahlen der allgemeinen Zahlenreihe. So ist z. B. mit Beziehung auf die Null:

$$(8 - 3) + (15 - 8) + (24 - 15) = 24 - 3 = 21$$
$$5 \quad + \quad 7 \quad + \quad 9 \quad = 21.$$

Wegen dieser inneren Verwandtschaft zwischen Zahlenreihe und der Geraden kann letztere zur Versinnlichung der allgemeinen Zahlenreihe dienen.

Geschichtliche Anmerkung. Schon die alten Inder haben mit positiven und negativen Zahlen gerechnet. Die ersteren heißen dhana oder sva und werden in der Bedeutung von Vermögen angewendet; die letzteren haben die Namen rina und kshaya und werden im Sinne von Schulden gebraucht. Selbst die Versinnlichung des Gegensatzes von positiven und negativen Zahlen durch den Gegensatz der Richtung zweier Strecken ist dem Inder nicht fremd.

§ 40. Lehrsätze über Null.

Da nach § 29 alle Differenzen gleicher Zahlen den Wert Null haben, so kann man umgekehrt für die Zahl 0 eine beliebige Differenz aus zwei gleichen Zahlen setzen. Hiervon macht man Anwendung, um die Gesetze für das Rechnen mit Null zu entwickeln und zu begründen.

Aus der Definitionsformel der Null:

$$a - a = 0$$

folgt mit Benutzung von § 5, 2

Formel I: $a + 0 = a$

und mit Anwendung von § 5, 3

Formel II: $a - 0 = a,$

d. h. in Worten:

1) **Lehrsatz:** Der Wert einer Zahl bleibt ungeändert, wenn man Null zu derselben addiert oder von derselben subtrahiert.

Nach § 8, 1 ist:

$$a \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + \cdots\cdot 0 \quad (a\text{-mal})$$

Der Wert dieser Summe ist nach dem vorigen Lehrsatze gleich

Null. Setzt man in dem Produkte $a \cdot b \cdot 0$ an Stelle von Null die Differenz $m - m$, so entsteht:

$$a \cdot b \cdot 0 = ab(m - m) = abm - abm \quad \text{nach § 9, 4}$$
$$= 0.$$

2) **Lehrsatz:** Ein Produkt, in welchem ein Faktor Null ist, hat den Wert Null.

Um den Wert des Quotienten $0 : a$ zu bestimmen, setzen wir $0 = m - m$, dann ist:

$$0 : a = (m - m) : a = \frac{m}{\pm a} - \frac{m}{\pm a} \quad (\text{§ 13, 3}) \quad = 0.$$

Formel III: $0 : \pm a = 0$.

3) **Lehrsatz:** Der Wert eines Quotienten, dessen Divisor eine (positive oder negative) Zahl und dessen Dividend Null ist, ist der Null gleich.

Die Richtigkeit der Formel III ergiebt sich auch daraus, daß nach dem zweiten Lehrsatze das Produkt aus dem Divisor a und dem Quotienten 0 den Dividenden 0 giebt.

Der Wert des Quotienten $0 : 0$ ist unbestimmt. Er kann jeder positiven und negativen Zahl, auch der Null gleich sein. Denn er bezeichnet die Zahl, welche mit 0 multipliziert den Wert Null liefert und nach dem zweiten Lehrsatze ist das Produkt aus jeder Zahl und Null dem Dividenden 0 gleich. In jedem einzelnen Falle jedoch muß ein Quotient, wenn er sich auch in der scheinbar unbestimmten Form $0 : 0$ darstellt, einer positiven oder negativen Zahl oder auch der Null selbst gleich sein. So erhält z. B. der Quotient $\frac{x^2 - 16}{x - 4}$ durch Einsetzen des Wertes $x = 4$ die Form $\frac{0}{0}$. Zerlegt man aber den Dividenden in zwei Faktoren, von welchen einer dem Divisor gleich ist, und hebt durch $x - 4$, so entsteht:

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = x + 4.$$

Setzt man nun $x = 4$, so ist der Wert des Quotienten gleich 8.

Der Ausdruck $a : 0$ kann keine algebraische Zahl, die Null eingeschlossen, bezeichnen; denn jede Zahl der relativen Zahlen-

reihe mit dem Divisor 0 multipliziert giebt 0, aber niemals den Dividenden a. Wir schließen daher jede Division durch 0 beim Rechnen mit endlichen Zahlen aus. Das Dividieren durch 0 führt zu widersinnigen Resultaten. So ist z. B. nach dem zweiten Lehrsatze die Gleichung:

$$1 \cdot 0 = 5000 \cdot 0$$

unbedingt richtig. Wollte man sich aber erlauben, beide Seiten dieser Gleichung durch 0 zu dividieren, so würde sich der Widersinn $1 = 5000$ ergeben.

Anmerkung. Die Null ist indischen Ursprungs und schon zur Zeit Brahmeguptas (geb. 598 n. Chr.) bestanden über das Rechnen mit derselben bestimmte, wenn auch dürftige Regeln. Dagegen Bhâskara (geb. 1144 n. Chr.) weiß die Bedeutung des Quotienten $a:0$ richtig anzugeben, obgleich er an anderer Stelle „das Rechnen mit der Null in haarsträubender Weise mißbraucht.“

Über unendlich Großes und unendlich Kleines. Eine nach beiden Seiten hin unbegrenzte Gerade ist eine unendliche Größe. Diese Linie durch eine Maßeinheit, z. B. 1 cm gemessen, würde eine Zahl mit unendlich vielen Einheiten liefern. Das unendlich Große ist größer als jede Zahl, die wir durch Ziffern bezeichnen können, es ist ein unbegrenztes Vielfache der Einheit im Gegensatz zu den endlichen Zahlen, die ein begrenztes Vielfache von ± 1 darstellen. Es sind verschiedene unendliche Zahlgrößen denkbar. Denkt man sich z. B. eine nach beiden Seiten hin ohne Ende fortlaufende Strecke in einem beliebigen Punkte geteilt, so versinnlicht jedes Stück ein unendlich Großes. Jedes derselben ist aber offenbar verschieden von dem unendlich Großen, welches durch die ganze Linie dargestellt wird. Es ist aber gebräuchlich, jedes unendlich Große, insofern es nur im Gegensatz zu den endlichen Zahlen gedacht wird, durch dasselbe Zeichen, nämlich ∞ auszudrücken, das „unendlich“ ausgesprochen wird. Die Richtigkeit der folgenden Gleichungen ist aus dem Begriff des Unendlichen leicht zu erweisen.

1) $\infty + \infty = \infty$; 2) $\infty \cdot \infty = \infty$; 3) $\infty + a = \infty$;
4) $\infty - a = \infty$; 5) $a \cdot \infty = \infty$; 6) $\infty : a = \infty$.

Um die Bedeutung des Quotienten $a:0$ darzulegen, setze man an Stelle von Null vorläufig die veränderliche Größe x, welche im steten Abnehmen begriffen gedacht wird. Es sei $x = 0{,}000001$, so wird $a:x = a:0{,}000001 = a$ Millionen; bedeutet $x = 0{,}000000001$, so wird $a:x = a$ Milliarden, u. s. w. Je näher der Wert für x an die Grenze 0

rückt, desto mehr wächst der Quotient $a : x$ und zuletzt muß sein Wert ∞ werden. Es ist daher $a : 0 = \infty$ nichts anderes als ein abgekürzter Ausdruck dafür, daß die Grenze der fortgesetzten Teilung durch einen stets kleiner werdenden Divisor außerhalb der endlichen Zahlenreihe liegt. — Wenn hingegen in dem Quotienten $a : x$ die veränderliche Größe x stets wachsend und zuletzt so groß gedacht wird, als habe sie das Gebiet der endlichen Zahlenreihe überschritten, so muß der Wert des Quotienten sich unaufhörlich der Null nähern. Ist der Quotient so klein geworden, daß seine Verschiedenheit von 0 nicht mehr angebbar ist, so nennt man die Zahl „unendlich klein". Die unendlich kleine Zahl wird häufig eine „im Verschwinden begriffene" (verschwindende) Zahl genannt. Als Ausdruck für dieselbe dient das Zeichen ihrer Grenze, so daß $\frac{1}{\infty} = 0$ gesetzt wird.

V. Potenzen.

§ 41. Potenzen der positiven und negativen Zahlen.

Nach § 38, 1 hat jedes Produkt, dessen Faktoren sämtlich positive Zahlen sind, einen positiven Wert. Folglich muß auch jede positive Zahl mit einer absoluten Zahl (§ 32) potenziert, eine positive Potenz liefern. So ist z. B.:

$$(+4) \cdot (+4) = (+4)^2 = +16.$$

Bezeichnen a und n natürliche Zahlen, so ist allgemein:

$$\text{Formel I:} \quad (+a)^n = +(a^n).$$

1) **Lehrsatz:** Jede Potenz einer positiven Grundzahl giebt eine positive Zahl.

Nach dem Begriffe der Potenz ist:

$$0^n = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \cdots \cdot 0 = 0 \quad \text{nach § 40, 2.}$$

$$\text{Formel II:} \quad 0^n = 0.$$

2) **Lehrsatz:** Der Wert jeder Potenz mit der Grundzahl 0 und natürlichem Exponenten ist der Null gleich.

Aus dem zweiten Hauptgesetze in § 38 ergiebt sich die Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = +a^2;$$
$$(-a)^3 = (-a)^2 \cdot (-a) = -a^3;$$
$$(-a)^4 = (-a)^2 \cdot (-a)^2 = +a^4;$$
$$(-a)^5 = (-a^4) \cdot (-a) = -a^5; \text{ u. s. f.}$$

Bezeichnet n irgend eine ganze Zahl der natürlichen Zahlen-

reihe, so drückt das Zeichen $2n$ die geraden und $2n+1$ die ungeraden Zahlen aus. Nach § 17, 9 und § 38 ist allgemein:

$$(-a)^{2n} = \left[(-a)^2\right]^n = (+a^2)^n = +a^{2n};$$

ferner:

$$(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} \cdot (-a) = (+a^{2n}) \cdot (-a) = -a^{2n+1}.$$

Wir haben also die beiden

$$\text{Formeln: } \begin{cases} \text{III.} & (-a)^{2n} = +a^{2n}. \\ \text{IV.} & (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}. \end{cases}$$

3) **Lehrsatz:** Eine Potenz mit negativer Grundzahl ist positiv oder negativ, je nachdem der Exponent eine gerade oder ungerade absolute Zahl ist.

§ 42. Erweiterung des Potenzbegriffs: Potenzen mit dem Exponenten Null und mit negativen Exponenten.

Im ersten Abschnitt unter V ist die Lehre von den Potenzen mit natürlichen Zahlen behandelt worden, welche sich auf den in § 14 aufgestellten Potenzbegriff gründet. In § 41 haben wir ersehen, daß diese Definition auch für Potenzen mit positiven oder negativen Grundzahlen und natürlichen Exponenten ohne weiteres gültig ist. Dies hat unmittelbar zur Folge, daß die Rechengesetze unter V auch auf diese Potenzen anwendbar sind. Dagegen können Ausdrücke wie a^0 und a^{-n} im Sinne des ursprünglichen Potenzbegriffs nicht gedeutet werden, da es widersinnig ist, ein Produkt aus Null Faktoren oder gar aus einer negativen Anzahl Faktoren zu bilden. Um aber die unter V aufgestellten Gesetze ganz allgemein anwenden zu können und nicht jedesmal untersuchen zu müssen, ob der Potenzexponent eine positive Zahl bezeichnet, lassen wir die Bedingung, daß der Exponent eine positive Zahl ist, fallen und erklären auch obige Ausdrücke für Potenzen. Wir erweitern also den Potenzbegriff dahin, daß jeder Ausdruck, welcher die Form der ursprünglichen Potenz a^n hat, eine Potenz ist, auch dann, wenn n Null oder eine negative Zahl bezeichnet.

Um die Bedeutung der Potenzausdrücke a^0 und a^{-n} darzulegen, gehen wir zunächst von einer bekannten Analogie aus.

Nach dem dekadischen Gesetz (Einleitung, 7) gilt jede Einheit einer dekadisch dargestellten Zahl den zehnten Teil von dem Werte einer Einheit der links stehenden Ziffer. Wir können daher z. B. die Zahl 11110 durch eine Summe von fallenden Potenzen der Grundzahl 10 bezeichnen. Es ist nämlich:

$$11110 = 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1.$$

Wie man sieht, erhält man jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden, indem man letzteres durch die Grundzahl 10 dividiert oder vom Exponenten derselben 1 subtrahiert. Setzen wir dies Bildungsgesetz über die Ordnung der Zehner hinaus fort, so müssen die Stellenwerte der Zahl 1,11111 ·······*) nämlich:

$$1, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000} \cdots\cdots \frac{1}{10^n}$$

in konsequenter Befolgung der eingeführten Potenzbezeichnung durch:

$$10^0, \quad 10^{-1}, \quad 10^{-2}, \quad 10^{-3} \cdots\cdots 10^{-n}$$

dargestellt werden. Wir haben also die Gleichungen:

$$10^0 = 1$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

allgemein: $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$.

In den Gleichungen:

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{u. s. f.}$$

---

*) Hier ist die Kenntnis der Dezimalen, die ja in der Volksschule gelehrt wird, vorausgesetzt.

entsteht jede folgende Gleichung aus der vorhergehenden, indem man auf der linken Seite zum Exponenten 1 addiert und rechts mit der Grundzahl a multipliziert. Dieses Bildungsgesetz ist offenbar unbegrenzt richtig, also bis der Exponent n unendlich groß wird, falls $a > 1$ ist. In rückschreitender Folge erhalten wir jede Gleichung aus der vorhergehenden, wenn wir auf der linken Seite 1 vom Exponenten subtrahieren und auf der rechten Seite durch a dividieren. Gelangt man endlich durch Wiederholung dieses Schlusses zu der Gleichung $a^1 = a$, so liegt gar kein Grund vor, hier dem stets als richtig erkannten Schlusse eine Schranke zu setzen. Wir setzen vielmehr die Bildung der Gleichungen nach demselben Gesetz fort und erhalten:

$$a^0 = 1 \quad (\text{nach } \S\, 12, 6 \text{ ist } a : a = 1)$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\text{allgemein:} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

$$\text{Definitionsformel I:} \quad a^0 = 1.$$

$$\text{Definitionsformel II:} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

1) **Festsetzung:** Jede Potenz mit endlicher Grundzahl und dem Exponenten Null ist gleich 1.

2) **Festsetzung:** Jede Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem umgekehrten Wert der Grundzahl mit positivem Exponenten.

Anmerkung. Insofern für den Ausdruck a^{-n} das Zeichen $\frac{1}{a^n}$ gesetzt wird, gehören Potenzen dieser Art in den dritten Abschnitt (§ 62).

Die in V behandelten Lehrsätze gelten auch für Potenzen mit dem Exponenten Null. Das ergiebt sich schon daraus, daß diese Potenzform als besonderer Fall erscheint, wenn in der

allgemeinen Formel § 17, 3 die Exponenten gleich sind. Man hat alsdann:

$$a^m : a^m = a^{m-m}.$$

Da nun $a^m : a^m = 1$ (§ 12, 6) und für $m - m$ das Zeichen 0 gesetzt wird, so ist:

$$a^0 = 1.$$

Hier folgen die Gesetze für Potenzen mit dem Exponenten Null in arithmetischer Zeichensprache nebst den Beweisen für die Richtigkeit der Formeln.

$$\text{I.} \quad a^m \cdot a^0 = a^{m+0}.$$

Beweis:

$$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0} \quad (\S\ 40, 1).$$

$$\text{II.} \quad a^m : a^0 = a^{m-0}.$$

Beweis:

$$a^m : a^0 = a^m : 1 = a^m = a^{m-0} \quad (\S\ 40, 1).$$

$$\text{III.} \quad a^0 \cdot b^0 = (ab)^0.$$

Beweis:

$$a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1,$$

wofür man nach Lehrsatz 1 $(ab)^0$ setzen kann.

$$\text{IV.} \quad a^0 : b^0 = (a : b)^0.$$

Beweis:

$a^0 : b^0 = 1 : 1 = 1$ und $(a : b)^0$ ist ebenfalls gleich 1.

$$\text{V.} \quad (a^0)^0 = a^{0 \cdot 0}.$$

Beweis:

$(a^0)^0 = 1^0 = 1$ und $a^{0 \cdot 0} = a^0$ (§ 40, 2) $= 1$.

VI. Wurzeln.

Erweiterung des Wurzelbegriffs. In VI § 18 ist die Wurzel unter der Einschränkung definiert worden, daß die drei Größen, welche bei einem Wurzelausdruck inbetracht kommen, also Radikand, Exponent und Wurzel natürliche Zahlen bezeichnen. Wir halten nun fest, daß nur der Wurzelexponent eine absolute Zahl ist, und lassen auch Wurzeln mit negativen Grundzahlen und mit negativen Radi-

kanden zu. Im weiteren Sinne verstehen wir unter Wurzel diejenige positive oder negative Zahl, welche mit dem absoluten Wurzelexponenten potenziert, einen positiven oder negativen Radikanden liefert.

Gesetze über Wurzeln mit positiven und negativen Radikanden.

Nach § 41, 1 und 3 ist sowohl $(+a)^2$ als auch $(-a)^2$ gleich $+a^2$, allgemein:

$$(\pm a)^{2n} = (+a^2)^n = +a^{2n}.$$

Da nun die Radizierung die Umkehrung des Potenzierens ist, so haben wir $\sqrt{+a^2} = \pm a$ oder allgemein:

$$\text{Formel I:} \quad \sqrt[2n]{+a^{2n}} = \pm a.$$

1) **Lehrsatz:** Jede gerade Wurzel aus einem positiven Radikanden hat neben andern Werten zwei absolut gleiche, algebraisch entgegengesetzte Zahlenwerte.

Dieser Fall ist der einzige, in welchem eine Wurzel zwei verschiedenen (reellen) Zahlen gleich ist. Aus vorstehender Formel folgt:

$$\sqrt[2n]{+1} = \pm 1.$$

Da nach § 41, 3 eine Potenz mit negativer Grundzahl und ungeradem Exponenten stets negativen Charakters ist, so muß umgekehrt jede ungerade Wurzel aus einem negativen Radikanden negativ sein. So ist z. B. $\sqrt[3]{-27} = -3$.

$$\text{Formel II:} \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}.$$

Wenn auch Formel II stets richtig ist, so ist das Resultat $-\sqrt[2n+1]{a}$ doch keineswegs als allgemein und erschöpfend zu betrachten. Eine Untersuchung, welche den Rahmen dieser Schrift überschreitet, lehrt, daß jede Wurzel so viel Werte hat, als der Wurzelexponent Einheiten enthält.

2) **Lehrsatz:** Jede ungerade Wurzel aus einem negativen Radikanden hat nur einen (reellen) Wert.

Ist der Radikand einer ungeraden Wurzel positiv, so hat die Wurzel nur einen und zwar positiven Wert. So ist z. B. $\sqrt[3]{+27}$ nur gleich $+3$. Das Vorzeichen der ungeraden

Wurzel stimmt also stets mit dem Vorzeichen des Radikanden überein.

Formel IV: $\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}$.

3) **Lehrsatz:** Jede ungerade Wurzel aus einer positiven Zahl liefert stets nur einen, nämlich einen positiven Wert.

Zufolge dieses Lehrsatzes ist $\sqrt[2n+1]{+1} = +1$.

Die beiden Vorzeichen + und — dürfen nur in dem Falle zusammen vor einer Wurzelgröße stehen, wenn man die Art der Entstehung des Radikanden nicht kennt. $\sqrt{(+a)^2}$ ist immer nur $+a$ und $\sqrt{(-a)^2}$ ist stets nur gleich $-a$. Dagegen ist:

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm (a - b),$$

weil der Radikand sowohl aus $(a-b)^2$ als auch aus $(b-a)^2$ entstanden sein kann.

Ferner ist $\sqrt[n]{0} = 0$; denn nach § 41, 2 ist $0^n = 0$.

Die gerade Wurzel aus einer negativen Zahl, z. B. $\sqrt{-4}$ kann keiner der bisher betrachteten Zahlen gleich sein, weil es keine positive oder negative Zahl giebt, deren Quadrat den Radikanden -4 liefert. Wir haben es hier mit einer neuen Zahlform zu thun, deren Betrachtung in einem besondern Abschnitt erledigt wird.

Wurzeln mit negativem Wurzelexponenten, also Ausdrücke von der Form $\sqrt[-n]{a}$, finden im folgenden Abschnitt ihre Deutung.

Von den algebraischen Summen.

§ 43. Begriff und Eigenschaften einer algebraischen Summe.

Wie man die positiven und negativen Zahlen algebraische Zahlen nennt, so heißt eine Summe aus algebraischen Zahlen eine algebraische Summe, z. B.:

$$(+4) + (-7) + (-3) + (+12) + (+9) + (-8).$$

In der Regel reiht man in einer solchen Summe die einzelnen Summanden, d. i. die Ausdrücke mit ihren Vorzeichen, ohne Additionszeichen aneinander und schreibt:

$$+4 - 7 - 3 + 12 + 9 - 8.$$

Gelesen: plus 4 minus 7 minus 3 plus 12 plus 9 minus 8. Die einzelnen Ausdrücke (4, 7, 3 u. s. w.) einer algebraischen Summe werden auch **Glieder** genannt und nach der Art des Vorzeichens in **positive** und **negative** Glieder unterschieden. Hat das erste Glied kein Vorzeichen, so ist es als positiv anzusehen. Das Gesetz über die Vertauschung der Summanden (§ 3, 2) und die Hauptregel § 6, 5 gelten auch für die algebraische Summe. **Man kann also die Glieder einer algebraischen Summe in beliebiger Reihenfolge schreiben, wenn jedes Glied sein Vorzeichen beibehält.** Sind in einer algebraischen Summe zwei absolut gleiche, algebraisch entgegengesetzte Glieder, so kann man dieselben ohne weiteres auslassen, z. B.:

$$a - b - c + b + d + c = a + d.$$

Besteht eine algebraische Summe aus bestimmten Zahlen, so findet man den Betrag oder Wert der Summe in der Regel am kürzesten, indem man sowohl die positiven als die negativen Glieder addiert und letztere Summe von ersterer subtrahiert. So ist z. B.:

$$6 + 12 - 16 + 8 - 4 + 5 - 7$$
$$= (6 + 12 + 8 + 5) - (16 + 4 + 7) = 31 - 27 = 4.$$

Eine algebraische Summe auf eine geringere Anzahl von Gliedern zurückführen heißt dieselbe **reduzieren**.

In einer algebraischen Summe können auch Glieder von Klammern umschlossen sein. Alsdann bilden die Ausdrücke innerhalb der Klammer wieder eine algebraische Summe, welche auch wohl ein **zusammengesetztes** Glied genannt wird. **Steht vor einem zusammengesetzten Gliede das Zeichen +, so dürfen die Klammern unbeschadet der Richtigkeit ausgelassen werden. Ist dagegen einem mehrgliedrigen Ausdruck das Zeichen — vorgesetzt, so muß man beim Auflösen der Klammer alle Glieder innerhalb derselben mit entgegengesetztem Vorzeichen hinschreiben.** So ist z. B.:

$$a + b - (c + d - f) + g = a + b - c - d + f + g.$$

Manchmal erscheinen auch in einer algebraischen Summe zusammengesetzte Produkte, d. h. solche, in welchen ein Faktor (oder mehrere Faktoren) aus einem mehrgliedrigen Ausdruck besteht. Durch Ausführung der Rechenoperationen kann ein solches Produkt in eine algebraische Summe verwandelt werden, z. B.:

$$10a - 7c - 6(a + 2b - 3c) + 5 \cdot (3a - 4c)$$
$$= 10a - 7c - 6a - 12b + 18c + 15a - 20c.$$

Die Gesetze über Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen der natürlichen Zahlen sind auch für algebraische Summen gültig. Denn jede Summe aus natürlichen Zahlen kann als algebraische Summe aufgefaßt werden. Deutet man z. B. in der Summe der natürlichen Zahlen $a + b + c$ das Rechenzeichen $+$ als Vorzeichen, so stellt dieselbe eine Summe aus nur positiven Zahlen dar, welche ein besonderer Fall der algebraischen Summe ist. Ob man $12 - 8 + 6 - 5$ als zusammengesetzten Ausdruck der natürlichen Zahlen 12, 8, 6 und 5 betrachtet oder diese Zahlenverknüpfung als algebraische Summe aus den positiven Zahlen $(+12)$, $(+6)$ und den negativen Zahlen (-8) und (-5) ansieht, ist für das Ergebnis der Rechnung gleichgültig. Ebenso kann jede Differenz $a - b$ der natürlichen Zahlen als algebraische Summe aufgefaßt werden, da es gemäß dem Gesetze über die Subtraktion der algebraischen Zahlen (§ 35) einerlei ist, ob man von einer Zahl a eine andere b subtrahiert oder dieselbe algebraisch addiert, d. h. $a - b = a + (-b)$. Aus dieser Gleichung geht ein wesentlicher Vorteil der allgemeinen Arithmetik hervor. Es ist nämlich nicht nötig, ferner die früher aufgestellten Rechengesetze über die Differenz anzuwenden, da diese Zahlverbindung den Gesetzen über das Rechnen mit algebraischen Summen unterworfen wird.

§ 44. Addition und Subtraktion von algebraischen Summen.

1) **Lehrsatz:** Algebraische Summen werden zu einander addiert, indem man die gleichnamigen Glieder

unter einander schreibt und dieselben nach den Gesetzen in den §§ 34 und 35 addiert.

Um z. B. die Summen:

$$12a - 8b - 5c \quad \text{und} \quad 20b + 15a - 9c$$
$$\text{und} \quad 7c - 16a - 6b$$

in eine einzige zu vereinigen, richtet man die Rechnung auf folgende Weise ein:

$$\begin{array}{r} 12a - 8b - 5c \\ 15a + 20b - 9c \\ -16a - 6b + 7c \\ \hline 11a + 6b - 7c. \end{array}$$

2) **Lehrsatz:** Zwei algebraische Summen werden voneinander subtrahiert, indem man jedes Glied des Subtrahenden mit entgegengesetztem Vorzeichen zu den Gliedern des Minuenden addiert.

Beispiel:

$$20a - 14b + 7c - (12a - 9b - 8c).$$

Ausführung:

$$\begin{array}{r} 20a - 14b + 7c \\ 12a - 9b - 8c \\ \hline 8a - 5b + 15c. \end{array}$$

§ 45. Multiplikation algebraischer Summen.

1) **Lehrsatz:** Zufolge § 9, 1 und 4 wird eine algebraische Summe mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Glied mit der Zahl multipliziert und den entstandenen Teilprodukten bei gleichen Vorzeichen der Faktoren das Zeichen +, dagegen bei entgegengesetzten Vorzeichen das Zeichen — vorsetzt. (Vergleiche § 38.)

Beispiel:

$$(-7a + 9b - 5c) \cdot -3a = 21a^2 - 27ab + 15ac.$$

2) **Lehrsatz:** Zwei algebraische Summen werden miteinander multipliziert, indem man mit jedem Glied der einen Summe an allen Gliedern der andern Summe die Multiplikation vollzieht und den Teilprodukten bei gleichen Vorzeichen +, bei ungleichen − vorsetzt. (Vergleiche § 10, 10 und § 38 die Hauptgesetze.)

Soll z. B. die Summe:

$$5a - 3b - 2c \quad \text{mit} \quad 7a + 4b - 3c$$

multipliziert werden, so schreibt man die Faktoren untereinander und verfährt wie beim Multiplizieren mehrstelliger dekadischer Zahlen, mit dem Unterschiede, daß man von links nach rechts rechnet. Die gleichnamigen Produkte werden bei Ausführung der Rechnung untereinander geschrieben und zuletzt in ein Glied vereinigt.

Beispiel:

$$\begin{array}{llllll}
5a & -3b & -2c & & & \\
7a & +4b & -3c & & & \\
\hline
35a^2 & -21ab & -14ac & & & \\
 & +20ab & & -12b^2 & -8bc & \\
 & & -15ac & & +9bc & +6c^2 \\
\hline
35a^2 & -\;ab & -29ac & -12b^2 & +\;bc & +6c^2.
\end{array}$$

§ 46. Division algebraischer Summen.

1) **Lehrsatz:** Eine algebraische Summe wird (gemäß § 13, 1 und 3) durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied dividiert und den einzelnen Quotienten nach dem Hauptgesetze in § 39 das Vorzeichen giebt.

Beispiel:

$$(10x - 15y + 20z) : 5 = 2x - 3y + 4z.$$

Wenn eine algebraische Summe durch Multiplikation einer Summe mit einer algebraischen Zahl oder aus dem Produkt zweier algebraischen Summen entstanden ist (wie z. B. die letzte Summe in § 45), so muß umgekehrt die Division

derselben durch einen Faktor den andern Faktor liefern. Es ist z. B.:

$$\frac{ax + bx - az - bz}{x - z} = \frac{(a + b)x - (a + b)z}{x - z}$$

$$= \frac{(a + b)(x - z)}{x - z} = a + b.$$

Die Richtigkeit des Quotienten ergiebt sich daraus, daß:

$$(a + b) \cdot (x - z)$$

die algebraische Summe:

$$ax + bx - az - bz$$

liefert. Eine algebraische Summe durch eine andere dividieren heißt, einen Ausdruck durch Rechnung suchen, welcher mit dem Divisor multipliziert den Dividenden zum Produkte giebt.

Kann die Zerlegung des Dividenden in Faktoren nicht bewerkstelligt werden, so bedient man sich zur Verwandlung des Quotienten in eine algebraische Summe eines Rechnungsverfahrens, welches mit der Division mehrstelliger natürlicher Zahlen durch einen mehrteiligen Divisor große Ähnlichkeit hat. Zur Kenntnis gewisser Regeln, welche bei der Division algebraischer Summen zu befolgen sind, gelangt man durch folgende Überlegung: Ist der Dividend S das Produkt aus dem Divisor s und einer algebraischen Summe, so müssen die Buchstaben des Divisors auch im Dividenden enthalten sein. (Man sehe das Beispiel in § 45 unter 2.) Vor Ausführung der Division einer algebraischen Summe durch eine solche Summe muß man daher zunächst sowohl die Glieder des Dividenden als die Glieder des Divisors ordnen, und zwar zunächst nach dem Alphabet. Beim Ordnen der Summen ist ferner der Rang der Glieder nach ihrem Potenzwert zu berücksichtigen. Die Rangordnung der Glieder ist eine zweifache: steht das Glied mit dem höchsten Potenzexponenten zuerst und folgen nun die übrigen Glieder ihrem Range entsprechend, so daß die Summe mit dem Gliede der niedrigsten Potenz abschließt, so ist die algebraische Summe nach fallenden Potenzen, im um-

gekehrten Falle nach steigenden Potenzen geordnet. Die Zahl, nach welcher eine algebraische Summe geordnet ist, wird Hauptgröße oder Ordnungsgröße genannt. Die Summe:

$$12x^4 - 8x^3 + 5x^2 + x - 15$$

ist nach fallenden Potenzen und die folgende:

$$8 + x - 7x^2 - 5x^3 + 10x^4$$

ist nach steigenden Potenzen von x geordnet. Sind Dividend und Divisor übereinstimmend geordnet, so wird die Division auf eine solche Weise auszuführen sein, daß auch der Quotient, die gesuchte Summe, entsprechend geordnet erscheint.

Als Grundlage zur Verwandlung des Quotienten zweier algebraischen Summen S und s in eine algebraische Summe dient folgende Formel:

$$\frac{S}{s} = q + \frac{S - qs}{s}.$$

Diese Gleichung spricht folgende Regel aus: Man dividiere das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors, so erhält man den ersten Teilquotienten q. Diesen multipliziere man mit sämtlichen Gliedern des Divisors und subtrahiere die erhaltenen Produkte vom Dividenden nach der Regel: Algebraisch Subtrahieren heißt, mit entgegengesetztem Vorzeichen addieren (§ 38). Ordnet man nun den Rest $S - qs$ und wendet auf den Quotienten $S - qs$ vorstehende Formel in derselben Weise an, so findet man das zweite Glied der gesuchten Summe. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man nach und nach alle Glieder der zu suchenden algebraischen Quotienten. Tritt der Fall ein, daß die Differenz $S - qs$ Null giebt, so sagt man, die Division geht auf oder der Dividend ist durch den Divisor (ohne Rest) teilbar. — Bei Ausführung der einzelnen Divisionen vergesse man nicht, den Quotienten das richtige Vorzeichen zu geben (§ 39).

Beispiel: Es sei die algebraische Summe:

$$15x^2 + 16xy - 15y^2 + 2xz + 26yz - 8z^2$$

durch die algebraische Summe:

$$3x + 5y - 2z \qquad \text{zu dividieren.}$$

Darstellung des Rechnungsverfahrens:

$$
\begin{array}{l}
(15x^2+16xy-15y^2+\ 2xz+26yz-8z^2):(3x+5y-2z) \\
\underline{15x^2+25xy \qquad -10xz} \qquad\qquad =5x-3y+4z. \\
\quad -\ 9xy-15y^2+12xz+26yz-8z^2 \\
\quad \underline{-\ 9xy-15y^2 \qquad +\ 6yz} \\
\qquad\qquad 12xz+20yz-8z^2 \\
\qquad\qquad \underline{12xz+20yz-8z^2} \\
\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Erläuterung vorstehender Rechnung. Das erste Glied des Dividenden $15x^2$ durch das erste Glied des Divisors $3x$ dividiert giebt $5x$, den ersten Teil der gesuchten algebraischen Summe. Diesen Teilquotienten mit dem ganzen Divisor multipliziert, liefert:

$$(3x + 5y - 2z) \cdot 5x = 15x^2 + 25xy - 10xz.$$

Durch Subtraktion dieses Teilproduktes vom Minuenden entsteht:
$$- 9xy - 15y^2 + 12xz + 26yz - 8z^2.$$

Dividieren wir das erste Glied dieses Restes $-9xy$ durch $3x$, so erhalten wir das zweite Glied des gesuchten Divisors, nämlich $-3y$. Das Produkt:

$$(3x + 5y - 2z) \cdot - 3y = - 15xy - 15y^2 + 6yz$$

vom vorigen Reste subtrahiert, giebt:

$$12xz + 20yz - 8z^2.$$

Den ersten Teil dieses Restes durch $3x$ dividiert, liefert den dritten Teilquotienten, nämlich $4z$. Subtrahiert man das Produkt:

$$(3x + 5y - 2z) \cdot 4z \quad \text{oder} \quad 12xz + 20xy - 8z^2$$

vom vorigen Reste, so bleibt Null übrig. Die gesuchte algebraische Summe heißt also:

$$5x - 3y + 4z.$$

Dieser Quotient ist richtig, weil nach dem Grundgesetze der Division $Q \cdot d = D$, das Produkt:

$$(3x + 5y - 2z) \cdot (5x - 3y + 4z)$$

den Dividenden liefert. In vorstehender Rechnung ist die Formel:

$$\frac{S}{s} = q + \frac{S - qs}{s}$$

dreimal angewendet worden. Durch die erste Division ergab sich $q = 15x^2 : 3x = 5x$, und bezeichnen wir die gegebenen Summen in dem gelösten Beispiele zur Kürze mit S und s, so ist:

$$\frac{S}{s} = q + \frac{S - qs}{s} = 5x + \frac{-9xy - 15y^2 + 12xz + 26yz - 8z^2}{3x + 5y - 2z}.$$

Durch Anwendung der Formel auf den letzteren Quotienten erhielten wir: $q = -9xy : 3x = -3y$ und

$$\frac{S}{s} = q + \frac{S - qs}{s} = 5x - 3y + \frac{12xz + 20yz - 8z^2}{3x + 5y - 2z}.$$

Behandelt man den Quotienten rechts in derselben Weise, so ergiebt sich: $q = 12xz : 3x = 4z$ und

$$\frac{S}{s} = q + \frac{S - qs}{s} = 5x - 3y + 4z + \frac{0}{3x + 5y - 2z}$$
$$= 5x - 3y + 4z.$$

Der letzte Quotient ist nach § 40 der Null gleich.

Beweis für die Richtigkeit der Verwandlungsformel:

$$\frac{S}{s} = q + \frac{S - qs}{s}.$$

Diese Gleichung ist richtig, wenn dem Grundgesetz $Q \cdot d = D$ zufolge:

$$\left(q + \frac{S - qs}{s}\right) \cdot s = S$$

ist. Durch Ausführung der Multiplikation entsteht:

$$qs + S - qs = S.$$

Ist der Divisor s nicht Faktor des Dividenden S, so kann durch Ausführung der Division die Differenz $S - qs$ nie gleich Null werden, also die Rechnung nicht aufgehen, mag man dieselbe so lange fortsetzen, als man will. Die Division geht nie auf, wenn eine Zahl durch eine algebraische Summe dividiert wird. In diesem Falle kann man eine beliebige Anzahl von Gliedern berechnen, vergesse aber nicht, als letztes

Glied den Quotienten aus dem letzten Rest und dem Divisor, $\frac{R_n}{s}$, anzuschreiben. Häufig erkennt man aus den ersten berechneten Gliedern ein bestimmtes Gesetz, nach welchem man die folgenden Summanden ohne weiteres bilden kann. Es sei z. B. die Zahl 1 durch die Summe $1 + a$ zu dividieren.

$$1 : (1 + a) = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \frac{a^5}{1 + a}.$$

$$\begin{array}{l} \underline{1 + a} \\ \quad - a \\ \quad \underline{- a - a^2} \\ \qquad\quad a^2 \\ \qquad\quad \underline{a^2 + a^3} \end{array}$$

$$1 : (1 - a) = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \frac{a^5}{1 - a}.$$

Nun sind wir auch imstande, den Wert des Quotienten $\frac{a}{0}$ noch anders zu bestimmen. Setzt man an Stelle des Divisors Null die gleichwertige Differenz $a - a$, so ist $\frac{a}{0}$ gleich:

$$a : (a - a) = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots\cdots + \frac{a}{a - a}$$

$$\begin{array}{l} \underline{a - a} \\ \qquad a \\ \qquad \underline{a - a} \\ \qquad\qquad a \end{array}$$

Da die Division nicht aufgeht und jedes Glied des Quotienten 1 ist, so leuchtet ein, daß der Quotient $a : 0$ eine unendliche Reihe von Einheiten, d. h. eine unendliche Zahl (§ 40) bezeichnet. Aus diesem Grunde benutzt man den Quotienten $\frac{1}{0}$ auch als Zeichen für ∞.

§ 47. Zerlegung algebraischer Summen in Faktoren.

In § 45 ist gezeigt worden, wie man zwei Produkte, welche algebraische Summen sind, in eine einzige Summe verwandelt. Hier soll die umgekehrte Operation behandelt werden, nämlich die Verwandlung oder Zerlegung alge-

braischer Summen in Produkte. Diese Umformung ist in vielen Fällen von Wichtigkeit.

1) Haben die Glieder einer algebraischen Summe einen Faktor gemeinschaftlich, so sondere man ihn ab. Wie dies geschieht, lehrt die Formel:

$$ab \pm ac = a(b \pm c).$$

(Vergleiche die Bemerkungen § 9, Seite 33.)

Beispiele:

$$5m \pm 5n = 5(m \pm n); \quad 24a - 18b = 6(4a - 3b);$$
$$3a^2b - 6ab^2 + 18abc = 3ab(a - 2b + 6c).$$

2) Größere Schwierigkeit bietet die Zerlegung algebraischer Summen, welche durch zwei- und mehrgliedrige Faktoren bezeichnet werden müssen. Da hier nicht alle Glieder mit einem gemeinschaftlichen Faktor behaftet sind, so überlege man, ob 2 und 2, 3 und 3 Glieder u. s. w. sich wie vorhin in ein Produkt verwandeln lassen, z. B.:

$$ac - bd + ad - bc = c(a - b) + d(a - b)$$
$$= (a - b)(c + d);$$
$$2ab + c - 2a - bc = 2a(b - 1) - c(b - 1)$$
$$= (2a + c)(b - 1).$$
$$15am - 8cn - 10an + 12cm - 9bm + 6bn$$
$$= 3m(5a - 3b + 4c) - 2n(5a - 3b + 4c)$$
$$= (5a - 3b + 4c)(3m - 2n).$$

3) Besteht die algebraische Summe aus einer ungeraden Anzahl Glieder, so läßt sich dieselbe nicht direkt in ein Produkt verwandeln. Manchmal kommt man auch hier zum Ziele, wenn man vorerst durch Zerlegung eines Gliedes in eine Summe oder in eine Differenz eine gerade Anzahl von Gliedern schafft und dann das Verfahren unter 2) anwendet. Das Gelingen der Umformung hängt wesentlich von der Wahl des zu zerlegenden Summanden und von der Art der Zerlegung ab. Durch aufmerksame Betrachtung der Glieder und Übung erlangt man alsbald eine gewisse Geschicklichkeit in dieser Rechenarbeit.

Beispiele:

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = x^2 + xy + 2xy + 2y^2$$
$$= x(x + y) + 2y(x + y) = (x + y)(x + 2y).$$
$$x^2 + xy - 12y^2 = x^2 + 4xy - 3xy - 12y^2$$
$$= x(x - 3y) + 4y(x - 3y) = (x + 4y)(x - 3y).$$

*4) Die Formeln § 16, 2β und 4β, 8, 9 und § 17 Seite 66 1 bis 5 können oft mit Vorteil angewendet werden, z. B.:

$$x^2 + 6y + 9y^2 = (x + 3y)^2 = (x + 3y)(x + 3y).$$
$$9x^2 \pm 12xy + 4y^2 = (3x \pm 2y)^2;$$
$$4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y) \cdot (2x - 3y);$$
$$x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - xy + 1);$$
$$x^2 - y^2 - z^2 + 2yz = x^2 - (y - z)^2$$
$$= (x + y - z) \cdot (x - y + z).$$

5) Eine algebraische Summe von der Form $x^2 \pm px \pm q$ heißt ein nach fallenden Potenzen von x geordneter quadratischer Ausdruck. Um die Regeln für die Faktorenbildung derartiger Ausdrücke zu gewinnen, bilde man die folgenden Gleichungen, in welchen $a > b$ ist:

$$(1)\quad (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$
$$(2)\quad (x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$$
$$(3)\quad (x - a)(x + b) = x^2 - (a - b)x - ab$$
$$(4)\quad (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab.$$

Diese Gleichungen lehren: 1) Da der Buchstabe x als Faktor des ersten und zweiten Gliedes der entstandenen algebraischen Summe erscheint, so muß derselbe ein Summand der beiden zweigliedrigen Faktoren sein; 2) Der Koeffizient (Faktor) $\pm p$ des zweiten Gliedes ist die algebraische Summe der beiden andern Summanden der Faktoren, und das dritte Glied $\pm q$ ist das Produkt derselben. 3) Regel für die Auffindung der zweiten Glieder der Faktoren: Man zerlege das dritte Glied $\pm q$ in ein Produkt aus zwei algebraischen

Zahlen, deren Summe gleich dem Koeffizienten $\pm p$ des zweiten Gliedes des quadratischen Ausdrucks ist.

1) Beispiel: $x^2 + 9x + 20$. Da das zweite und dritte Glied das Vorzeichen + haben, so sind die Glieder der binomischen Faktoren positiv. Nun ist:

$$\begin{aligned}(+20) &= (+1)\cdot(+20)\\ &= (+2)\cdot(+10)\\ &= (+4)\cdot(+\ \ 5).\end{aligned}$$

Der Bedingung, daß die Koeffizientensumme gleich $+9$ ist, genügt nur das letzte Produkt; folglich ist:

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5).$$

2) $x^2 + 2x - 48$. Da das zweite Glied des quadratischen Ausdrucks positiv, das letzte aber negativ ist, so ist Formel 2 (in der Umkehrung) anzuwenden. Es ist:

$$\begin{aligned}(-48) &= (-1)\cdot(+48) = (+1)\cdot(-48)\\ &= (-2)\cdot(+24) = (+2)\cdot(-24)\\ &= (-3)\cdot(+16) = (+3)\cdot(-16)\\ &= (-4)\cdot(+12) = (+4)\cdot(-12)\\ &= (-8)\cdot(+\ \ 6) = (+8)\cdot(-\ \ 6).\end{aligned}$$

Von diesen Zerlegungen erfüllt das letzte Produkt $(+8)\cdot(-6)$ die Forderung, daß die algebraische Summe der Faktoren gleich $+2$ ist. Folglich ist:

$$x^2 + 2x - 48 = (x+8)(x-6).$$

Die ausführliche Darlegung der Zerlegung in folgenden Beispielen ist dem Lernenden überlassen:

$$x^2 + 10x - 24 = (x+12)(x-2);$$
$$x^2 - 3x - 54 = (x-9)(x+6);$$
$$x^2 - 10x + 9 = (x-9)(x-1);$$
$$x^2 - x - 30 = (x+5)(x-6);$$
$$x^2 - 2ax - 8a^2 = (x+2a)(x-4a);$$
$$x^2 - 23x + 120 = (x-15)(x-8);$$

$$3x^2 + x - 2 = (x + 1)(3x - 2);$$
$$12x^2 - 17x + 6 = (4x - 3)(3x - 2).$$

Die Zerlegung algebraischer Ausdrücke von der Form $x^2 \pm px \pm q$ ist wichtig, weil sie uns ein Mittel bietet, gemischte quadratische Gleichungen zu lösen.

§ 48. Vereinigung von Quotienten aus algebraischen Summen; Kürzen derselben.

a) Vereinigen. Die Vereinigung von Quotienten geschieht nach den in § 13 unter 2) und 4) aufgestellten Lehrsätzen. Sind die Divisoren der Quotienten verschieden, so müssen letztere vorerst gleichnamig gemacht werden. Das Gleichnamigmachen besteht darin, daß man Dividend und Divisor eines jeden Quotienten mit einem solchen Ausdruck multipliziert, daß dieselben gleichen Divisor erhalten. Die Richtigkeit dieses Rechnungsverfahrens gründet sich auf den 10) Lehrsatz in § 13. Einen gemeinsamen Divisor, Hauptdivisor oder Dividuus, ungleichnamiger Quotienten erhält man stets durch das Produkt sämtlicher Divisoren. Der auf diese Weise gebildete Hauptdivisor ist indes nicht immer der kleinste. Um den letzteren zu finden, kann man die im vorigen Paragraphen gelehrte Faktoren-Zerlegung der Divisoren benutzen. Manchmal ist der Divisor eines der zu vereinigenden Quotienten der Hauptdivisor.

1) Beispiel: $\dfrac{x}{x+a} + \dfrac{a}{x-a}$.

Der Hauptdivisor heißt $(x + a)(x - a)$. Bezeichnet man die Summe der Quotienten mit S, so ist:

$$S = \frac{x(x - a) + a(x + a)}{(x + a)(x - a)} = \frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}.$$

2) Die Quotienten:

$$\frac{x^2 + y^2 + xy}{x + y}, \quad - \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} \quad \text{und} \quad \frac{2y^3 + x^2 - y^2}{x^2 - y^2}$$

zu addieren.

Der Hauptdivisor ist $x^2 - y^2$, weil $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ist (§ 16, 7β). Es ist daher:

$$S = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x^2-xy+y^2)(x+y)+2y^3+x^2-y^2}{x^2-y^2}.$$

Nach Formel (3) Seite 66 ist das erste Produkt des Dividenden gleich $x^3 - y^3$, das zweite Produkt liefert $x^3 + y^3$ nach Formel (2). Folglich ist:

$$S = \frac{x^3 - y^3 - (x^3 + y^3) + 2y^3 - y^2 + x^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1.$$

3) Beispiel: Es seien die Quotienten:

$$\frac{x - 4}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{und} \quad \frac{10 - x}{x^2 + 3x - 10}$$

zu vereinigen. Nach § 47, 5 ist:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

und $$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5).$$

Der kleinste Dividuus heißt:

$$(x - 2)(x - 3)(x + 5).$$ Mithin:

$$S = \frac{(x + 5)(x - 4) + (x - 3)(10 - x)}{(x - 2)(x - 3)(x + 5)} = \frac{14x - 50}{x^3 - 19x + 30}.$$

b) Kürzen. Um Quotienten algebraischer Summen zu kürzen, wendet man die in § 47 behandelte Umformung algebraischer Summen an. Man verwandelt den Dividenden und den Divisor in Produkte und hebt den Quotienten durch den gemeinschaftlichen Faktor, z. B.:

1) $$\frac{x^2 - y^2}{(x + y)^2} = \frac{(x - y)(x + y)}{(x + y)(x + y)} = \frac{x - y}{x + y}.$$

2) $$\frac{6a^4b - 6a^2b + 12a^2b^3}{8a^3b^2 - 8ab^2 + 16ab^4} = \frac{3a(2a^3b - 2ab + 4ab^3)}{4b(2a^3b - 2ab + 4ab^3)} = \frac{3a}{4b}.$$

3) $$\frac{2x + 4}{x^2 - 4x - 12} = \frac{2(x + 2)}{(x + 2)(x - 6)} = \frac{2}{x - 6}.$$

4) $$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 5x + 4} = \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x + 1)(x + 4)} = \frac{x - 1}{x + 1}.$$

§ 49. Potenzieren einer algebraischen Summe.

Die Lehrsätze § 16, 3β und 4β können wir jetzt in folgende Wahrheit zusammenfassen:

Lehrsatz: Das Quadrat einer algebraischen Summe ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen

Glieder und den doppelten Produkten aus je zwei Summanden. Z. B.:

$$(a-b+c-d)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd.$$

Potenzierung eines Binomons $a \pm b$. Entwickelt man nach § 40 und § 16, 2β und 9 die Potenzen der Summe $a+b$, so erhält man:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3ab+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Folgerung 1. Jedes Teilprodukt der Potenz einer Summe besteht aus so viel Faktoren, als der Exponent Einheiten enthält. Die Anzahl der Faktoren eines jeden Gliedes in der entwickelten Reihe der Potenz $(a+b)^n$ ist allgemein gleich n.

Folgerung 2. Das Anfangsglied der entwickelten Potenzreihe heißt a^n, das Endglied b^n. Die Exponenten der Potenzen von a nehmen stetig um 1 ab, während die Exponenten der Potenzen von b stetig um 1 wachsen, die Summe der Exponenten eines jeden Gliedes ist also gleich n. Der Ausdruck $(a+b)^n$ besteht also aus folgenden Produkten:

$$a^n, \quad a^{n-1}b, \quad a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots a^2b^{n-2}, \quad ab^{n-1}, \quad b^n.$$

Folgerung 3. Die Anzahl der Glieder ist um 1 größer als der Exponent der Summe. Durch die Entwickelung der Potenz $(a+b)^n$ muß also eine Reihe aus $n+1$ Gliedern entstehen. — Bezeichnet n eine gerade Zahl, so hat die Reihe ein Mittelglied. Ist der Exponent ungerade, so sind zwei Mittelglieder vorhanden.

Der Koeffizient*) des zweiten Gliedes der entwickelten Reihe von $(a+b)^3$ heißt 3. Diese Zahl ist gleich der Summe der Koeffizienten des zweiten und des ersten Gliedes der Potenz

*) Man pflegt den Multiplikator, wenn er eine numerische Zahl ist, Koeffizienten zu nennen.

$(a + b)^2$. Das dritte Glied der Reihe von $(a + b)^4$ hat den Koeffizienten 6. Letzterer ist gleich der Koeffizienten-Summe aus dem dritten und zweiten Gliede der entwickelten Reihe von $(a + b)^3$.

Folgerung 4. Das Anfangs- und das Endglied der Produktenreihe hat den Koeffizienten 1. Der Koeffizient der andern Glieder ist die Summe aus dem Koeffizienten des entsprechenden und des vorhergehenden Gliedes der nächst niedern Potenz. In der Koeffizienten-Reihe folgen die Zahlen vorwärts und rückwärts gelesen in gleicher Weise aufeinander.

Auf dieser Wahrheit beruht die Bildung der folgenden Tafel, welche die Koeffizienten der Glieder der Summe $a \pm b$ von der ersten bis zur sechsten Potenz enthält. Da die Produkte, welche vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehen, gleiche Koeffizienten haben, so ist nur die Berechnung derselben bis zum Mittelgliede nötig. Diese Tafel wird nach Pascal (1623—1662)*) das Pascalsche oder arithmetische Dreieck genannt.

0.	1
1.	1 1
2.	1 2 1
3.	1 3 3 1
4.	1 4 6 4 1
5.	1 5 10 10 5 1
6.	1 6 15 20 15 6 1.

Mit Benutzung der in den Folgerungen 1 bis 5 ausgesprochenen Bildungsgesetze über die Entwickelung der Potenzen von $a \pm b$ kann man die Produkte niederschreiben, ohne die bei höheren Potenzen zeitraubende Multiplikation ausführen zu müssen. Um z. B. die Potenz $(a + b)^7$ zu entwickeln, bestimme man zunächst die Koeffizienten der Glieder mit Benutzung der Koeffizienten der Potenz $(a + b)^6$.

*) Derselbe war ein berühmter französischer Mathematiker und Physiker. Er erfand u. a. obige praktische Methode zur Bildung der Binomial-Koeffizienten.

Die Koeffizienten sind:

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Die Produkte heißen:

$a^7, \quad a^6b, \quad a^5b^2, \quad a^4b^3, \quad a^3b^4, \quad a^2b^5, \quad ab^6, \quad b^7.$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Ist der Summand b negativ, so haben nach § 42 die geraden Potenzen von b positiven, die ungeraden negativen Wert. Die aus $(a-b)^n$ entwickelten Reihen unterscheiden sich also von der Potenz $(a+b)^n$ nur dadurch, daß die Glieder an gerader Stelle das Vorzeichen — haben. So ist z. B.:

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Das Gesetz, welches die Entwickelung der Potenz $(a \pm b)^n$ allgemein angiebt, führt den Namen „binomischer Lehrsatz". Die Formel desselben heißt:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \cdots + n \cdot ab^{n-1} + b^n.$$

Geschichtliche Bemerkungen. Die ersten Binomial-Koeffizienten waren den Arabern bereits gegen Ende des elften Jahrhunderts bekannt. In einer Schrift des chinesischen Mathematikers Tschuh schi kih, „Kostbarer Spiegel der vier Elemente" 1303, kommt die Koeffizienten-Tafel bis zur achten Potenz unter dem Namen „Lihn-Tafel" als eine alte Erfindung vor. Die Anfangsglieder finden sich ferner in der Arithmetik von Stiefel (1544). Seit Ende des siebzehnten Jahrhunderts nennt man die Tafel in Europa „arithmetisches Dreieck".

Zuerst hat obige Formel des binomischen Lehrsatzes der berühmte englische Mathematiker und Physiker Newton (1642—1726) angegeben. Dieselbe soll zu Ehren Newtons auf seinem Denkmal in der Westminster-Abtei eingegraben sein. Wegen seiner Wichtigkeit wird der binomische Lehrsatz mit Recht das Fundament der höheren Mathematik genannt.

§ 50. Ausziehen der Quadrat- und der Kubikwurzel aus algebraischen Summen.

Vor Beginn der Rechnung ordne man die algebraische Summe nach fallenden oder steigenden Potenzen eines Buch-

stabens. Das Rechnungsverfahren ist dasselbe wie bei der Radizierung der natürlichen Zahlen. (Vergleiche das S. 72 Gesagte.)

$$1)\quad \sqrt{16x^2 - 24xy + 9y^2} = \pm(\underbrace{4x}_{a} - \underbrace{3y}_{b})$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = (4x)^2 = & 16x^2 \\
2a = 8x \div & -24xy \\
2ab = 8x\cdot(-3y) = & -24xy \\
 & +9y^2 \\
b^2 = (-3y)^2 = & +9y^2 \\
 & 0.
\end{array}$$

$$2)\quad \sqrt{x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25} = \pm(\underbrace{x^2 \overset{a\,+\,b}{-} 4x}_{a'} + \underbrace{5}_{b'})$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = (x^2)^2 = & x^4 \\
2a = 2x^2 \div & -8x^3 \\
2ab = 2x^2\cdot(-4x) = & -8x^3 \\
 & +26x^2 \\
b^2 = (-4x)^2 = & +16x^2 \\
2a' = 2(x^2 - 4x) \div & 10x^2 - 40x \\
2a'b' = (2x^2 - 8x)\cdot 5 = & 10x^2 - 40x \\
 & +25 \\
b'^2 = 5^2 = & +25 \\
 & 0.
\end{array}$$

$$3)\quad \sqrt[3]{8x^6 - 36x^5 + 66x^4 - 63x^3 + 33x^2 - 9x + 1} = 2x^2 - 3x + 1$$

$$\begin{array}{rl}
a^3 = (2x^2)^3 = & 8x^6 \\
3a^2 = 3\cdot(2x)^2 = 12x^4 \div & -36x^5 \\
3a^2b = 12x^4\cdot(-3x) = & -36x^5 \\
 & +66x^4 \\
3ab^2 = 3\cdot 2x^2\cdot(-3x)^2 = & +54x^4 \\
 & +12x^4 - 63x^3 \\
b^3 = (-3x)^3 = & -27x^3 \\
3a'^2 = 12x^4 - 36x^3 + 27x^2 \div & +12x^4 - 36x^3 + 33x^2 \\
3a'^2b' = (12x^4 - 36x^3 + 27x^2)\cdot 1 = & 12x^4 - 36x^3 + 27x^2 \\
 & 6x^2 - 9x \\
3a'b'^2 = 3\cdot(2x^2 - 3x)\cdot 1^2 = & 6x^2 - 9x \\
 & +1 \\
b'^3 = 1^3 = & +1 \\
 & 0.
\end{array}$$

Dritter Abschnitt.

Zweite Erweiterung des Zahlenbegriffs: der Bruch.*)

§ 51. Auffassen des Bruches als mehrere gleiche Teile eines Ganzen.

Zur richtigen und klaren Auffassung der Bruchzahlen, zur Erzeugung eines klaren und deutlichen Begriffs dieser Zahlformen, ist unbedingt erforderlich, daß der Lehrer die Entstehung der Brüche anschaulich zeige. Zu diesem Zwecke bediene er sich zunächst konkreter Gegenstände, z. B. Stäbchen, Papier- und Bandstreifen, die vor den Augen der Schüler in zwei, vier, acht gleiche Teile zerlegt werden. Pestalozzi, der Begründer unserer heutigen Rechenmethode, benutzte zur Erzeugung der Bruchvorstellungen eine Bruchtabelle, welcher die gerade Linie zugrunde liegt und zur Veranschaulichung der Operationen mit Brüchen wendete er zwei Quadrattabellen an.**) In der That sind Raumgrößen ein nicht zu unterschätzendes Hilfsmittel zur anschaulichen Behandlung der Bruchrechnung. Welchen Wert z. B. die Teilung von Strecken in eine Anzahl gleicher Teile für die Auffassung des Bruches hat, ist so allgemein anerkannt, daß es kaum ein Rechenbuch geben dürfte, welches dieses Veranschaulichungsmittel nicht anwendet.

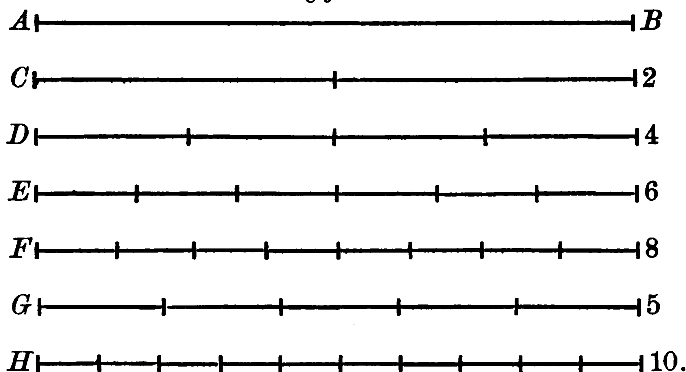
---

*) Vorbemerkung. In den §§ 51 bis 57 lassen wir zunächst eine mehr schulgemäße als wissenschaftliche Darlegung der Hauptteile der Bruchrechnung folgen. Dem Zwecke dieser Schrift entsprechend, die geometrische Versinnlichung der Zahlen zu benutzen „und das Ergebnis rechnender Überlegung den Sinnen erfaßbar zu machen", ist in diesem Teile der zu versinnlichende Stoff von den Bruchzahlen enthalten. Im Anschluß an diese Ausführungen wird die erweiterte Auffassung des Bruchbegriffs in den §§ 58 und 59 zur Behandlung kommen.

**) Die hohe unterrichtliche Bedeutung, welche Pestalozzi den Quadrattabellen beilegte, geht aus folgenden Worten desselben hervor: „Wenn mein Leben einen Wert hat, so besteht er darin, daß ich das Quadrat zum Fundamente einer Anschauung erhob, die das Volk nie hatte". (Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse, II. und III. Heft. 1803.)

Zum Zwecke der anschaulichen Erzeugung des Begriffes der Bruchzahlen benutzen wir von den Raumgebilden zunächst die Strecke von 1 dm Länge. Durch Teilung derselben in zwei, vier, acht, fünf und zehn gleiche Teile entstehen die benannten Brüche einhalb dm, ein viertel bis vier viertel dm u. s. w. Darauf gehe man zur Strecke überhaupt über. Der Verlauf der Behandlung ergiebt sich aus folgender Darstellung:

Fig. 19.



Die Strecke *AB* ist ungeteilt, sie stellt die Einheit, das Ganze, vor. Die folgenden Strecken sind in zwei, vier u. s. w. gleiche Stücke geteilt, sie dienen zur Veranschaulichung der Brüche einhalb, ein Viertel bis vier Viertel u. s. f. Auch ist aus der Darstellung ersichtlich, daß das Ganze zwei Halbe, drei Drittel u. s. w. hat. In ähnlicher Weise benutze man den Kreis und Teile desselben (Halbkreis, Viertelkreis u. s. w.), Quadrate, Rechtecke und den rechten Winkel. Brüche (Bruchzahlen) entstehen, wenn man irgend ein Ganzes, eine Einheit, in eine Anzahl gleicher Teile zerlegt und einen oder mehrere dieser Teile nimmt. Aus dieser genetischen Erklärung fließt folgende logische Definition des Bruches: Ein Bruch ist eine Zahl, welche einen oder mehrere Teile eines Ganzen bezeichnet, das in gleiche Teile geteilt ist. Der Bruch, welcher durch Zerlegung der Einheit in mehrere gleiche Teile entsteht, heißt Brucheinheit.

Brucheinheiten sind neue Einheiten, sie stehen im Gegensatz zu der Einheit der natürlichen Zahlen, welche von jetzt an ganze Zahlen genannt werden.

Eine Bruchzahl besteht aus zwei Zahlen, nämlich Zähler und Nenner. Der letztere deutet an, in wie viele gleiche Teile die Einheit zerlegt worden ist, er nennt die Anzahl Teile, in welche man das Ganze geteilt hat; daher sein Name. Die andere Zahl giebt die Anzahl der gleichen Teile an, welche man von der Brucheinheit genommen hat, sie zählt die Brucheinheiten, daher heißt sie Zähler. Ein Bruch wird dargestellt, indem man die Zahlen, welche Zähler und Nenner bezeichnen, senkrecht untereinander schreibt und dieselben durch einen wagerechten Strich (Bruchstrich) trennt. Der Bruch drei Fünftel wird also $\frac{3}{5}$ geschrieben.

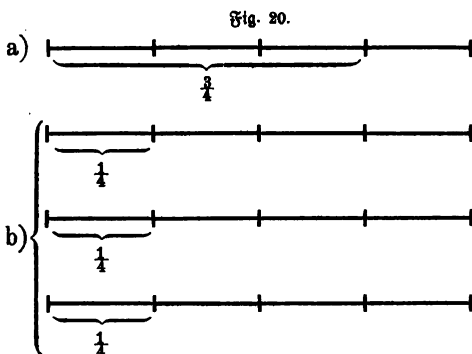
Arten der Brüche. Einen Bruch mit dem Zähler 1 (also jede Brucheinheit) nennt man Stammbruch, z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$. Die von letzterem abgeleiteten Brüche, also Vielfache der Brucheinheit, heißen Zweigbrüche. Je nachdem der Zähler eines Bruches kleiner oder größer als sein Nenner ist, wird der Bruch echt oder unecht genannt. Brüche, welche gleichen Namen, d. h. gleiche Nenner haben, heißen gleichnamige, solche mit verschiedenen Nennern ungleichnamige Brüche. Wenn eine ganze Zahl mit einem Bruche verbunden ist, so nennt man diesen Ausdruck eine gemischte Zahl. Man läßt das Zeichen + fort und schreibt statt $12 + \frac{3}{4}$ in der Regel $12\frac{3}{4}$.

§ 52. Auffassung des Bruches als Teil von mehreren Ganzen.

Der Bruch $\frac{3}{4}$ bedeutet ursprünglich: die Einheit (das Ganze) ist in vier gleiche Teile zerfällt und von diesen Teilen, Stammbrüchen, sind drei zu einer Zahl vereinigt. Diese Auffassung des Bruches $\frac{3}{4}$ versinnlicht die Darstellung a (Fig. 20, S. 143). Der Bruch $\frac{3}{4}$ läßt indes auch eine zweite Deutung zu; er kann nämlich als der vierte Teil von drei Ganzen aufgefaßt werden, was die Darstellung unter b (Fig. 20, S. 143)

veranschaulicht. In diesem Sinne ist der Bruch gleichbedeutend mit einem unentwickelten Quotienten.

Fig. 20.



Lehrsatz: Jeder Bruch ist demjenigen Quotienten gleich, dessen Dividend gleich dem Zähler und dessen Divisor dem Nenner des Bruches gleich ist.

Um sich davon zu überzeugen, ob die Schüler eine richtige und klare Vorstellung von den Bruchzahlen gewonnen haben, lasse der Lehrer mehrere Brüche nach ihrer zweifachen Auffassung an Strecken, Quadraten und Kreisen darstellen.

§ 53. Das Grundgesetz der Wertbeständigkeit eines Bruches.

Das Gesetz der Wertbeständigkeit eines Bruches bildet die Grundlage der ganzen Bruchrechnung. Auf ihm beruhen das Erweitern, das Heben, das Addieren ungleichnamiger Brüche. Auch das Teilen der Brüche durch ganze Zahlen, das Dividieren gleichnamiger Brüche durcheinander und das Gesetz über das Teilen durch einen Bruch überhaupt — wenn der Dividend eine ganze Zahl oder ein mit dem Divisor ungleichnamiger Bruch ist — können mit Benutzung dieses Gesetzes leicht zum Verständnis gebracht werden. Aus diesen Gründen darf man das Gesetz der Wertbeständigkeit das Hauptgesetz unter den Grundgesetzen über den Bruch nennen.*)

*) Wegen dieser Wichtigkeit des Hauptgesetzes ist dasselbe recht anschaulich und gründlich zu erläutern und als Baustein der Bruchrechnung anzuwenden.

Das Gesetz der Wertbeständigkeit kann leicht auf induktivem Wege und zwar an konkreten Bruchzahlen aus dem Begriffe derselben entwickelt werden. Es sei z. B. die Richtigkeit der Gleichung $\frac{1}{2}$ *M* = $\frac{5}{10}$ *M* nachzuweisen. Der Bruch $\frac{1}{2}$ *M* bedeutet seinem Begriffe nach die Hälfte von 1 *M* und dieser Wert kann durch ein Fünfzig-Pfennigstück veranschaulicht werden. Nach den Erörterungen unter § 51 kann der Bruch $\frac{5}{10}$ *M* aus 5 gleichen Teilen bestehend aufgefaßt werden, von welchen jeder den zehnten Teil von 1 *M* beträgt. Einen solchen Teil kann man durch ein Zehn-Pfennigstück und 5 dieser Teile durch 5 dieser Münzen versinnlichen. Dieselben haben offenbar einen Wert von 50 ₰. Auch die **zweite** Auffassung des Bruches (§ 52), nämlich 5 *M* : 10, führt zu demselben Wert, 50 ₰. Da nun die Brüche $\frac{1}{2}$ *M* und $\frac{5}{10}$ *M* denselben Wert, 50 ₰, bezeichnen, so muß $\frac{1}{2}$ *M* = $\frac{5}{10}$ *M* sein. Kurze Darstellung:

$\frac{1}{2}$ *M* = 50 ₰
$\frac{5}{10}$ „ = 50 „
―――――――――
$\frac{1}{2}$ *M* = $\frac{5}{10}$ *M*.

(Den Strich liest man „**folglich**".) Zähler und Nenner des Bruches $\frac{5}{10}$ *M* sind 5mal so groß als Zähler und Nenner des Bruches $\frac{1}{2}$ *M*. Die **Zahlen**, welche den Bruch $\frac{1}{2}$ *M* ausdrücken, haben sich also nur geändert, **nicht der Wert des Bruches**. In ähnlicher Weise kann die Richtigkeit der Gleichungen:

$\frac{3}{5}$ *M* = $\frac{6}{10}$ *M*; $\frac{4}{5}$ m = $\frac{8}{10}$ m; $\frac{2}{3}$ Jahr = $\frac{8}{12}$ Jahr

gezeigt werden.

Auch mit Hilfe von Strecken kann man das Gesetz der Wertbeständigkeit leicht gewinnen.*) Das hier einzuschlagende Verfahren möge an einem Beispiel gezeigt werden.

Man zeichne eine Strecke AB und teile sie in zwei gleiche

*) Man muß der graphischen Darstellung den Vorzug größerer Anschaulichkeit vor dem vorhin angegebenen Verfahren einräumen, da durch das Zeichnen der Sinnesthätigkeit des Schülers ein Objekt geboten und dadurch die Aufmerksamkeit und die Auffassung desselben gefördert wird.

Teile, so versinnlicht jedes Stück den Bruch $\frac{1}{2}$. Wird nun jede Hälfte halbiert, so stellt jeder Teil den Bruch $\frac{1}{4}$ dar. Die Zeichnung zeigt nun offenbar, daß $\frac{1}{2}$ der Strecke AB gleich $\frac{2}{4}$ derselben ist. Teilt man hierauf jedes Viertel in zwei gleiche Teile, so veranschaulicht jeder der erhaltenen Teile den Bruch $\frac{1}{8}$. Aus der Darstellung ist ersichtlich, daß:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}; \quad \frac{2}{4} = \frac{4}{8}; \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8}; \quad \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

ist u. s. f. Diese Gleichungen zeigen an, auf welche Weise der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Bruch aus dem links stehenden entstanden ist. Die aus diesem Verfahren anschaulich gewonnene Wahrheit kann etwa in folgender Form ausgesprochen werden:

Wenn man den Zähler und den Nenner eines Bruches mit derselben Zahl multipliziert, so bleibt der Wert des Bruches derselbe.

Dieses Gesetz benutzt man, um den Bruch zu erweitern, d. h. seinen Wert durch größere Zahlen auszudrücken.

Wenn wir die obigen Gleichungen rückwärts lesen, so gewinnen wir folgenden

Lehrsatz: Der Wert eines Bruches bleibt derselbe, wenn man sowohl Zähler als Nenner durch dieselbe Zahl teilt.

Von diesem Lehrsatz macht man Anwendung beim Kürzen oder Heben der Brüche. Einen Bruch heben heißt, seinen Wert durch kleinere Zahlen ausdrücken.

Die vier elementaren Grundrechnungen mit Brüchen.

§ 54. Addition und Subtraktion der Brüche.

Das Grundgesetz der Addition (§ 3, 1) und der Subtraktion (§ 5, 1) der ganzen natürlichen Zahlen gelten auch für die Brüche. Man kann also nur gleichnamige Brüche addieren und subtrahieren. Diese Operationen bieten für die Auffassung keinerlei Schwierigkeiten dar. Falls es indes nötig erscheint, dem Verständnis durch die Anschauung zu Hilfe zu kommen, kann man sich der Darstellungen § 51, Fig. 19

bedienen. Aus diesen bildlichen Darstellungen ergiebt sich durch unmittelbare Anschauung die Richtigkeit der folgenden Beispiele:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; \quad \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}; \quad \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

1) **Lehrsatz:** Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Summe ihrer Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert.

Zeige an derselben Zeichnung die Lösung nachstehender Beispiele:

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}; \quad \frac{9}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

2) **Lehrsatz:** Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Differenz der Zähler durch den gemeinsamen Nenner dividiert.

Sollen ungleichnamige Brüche addiert und subtrahiert werden, so muß man sie zuvor gleichnamig machen, und darauf nach dem ersten, bezw. dem zweiten Lehrsatze verfahren. Bei der Vereinigung ungleichnamiger Brüche findet das aus dem Rechnen bekannte Suchen des kleinsten Hauptnenners Anwendung.

§ 55. Multiplikation der Brüche.

Bei Behandlung des in der Überschrift genannten Gegenstandes sind drei Fälle zu berücksichtigen.

1) Der Multiplikand ist ein Bruch, der Multiplikator eine ganze natürliche Zahl.

Auf Beispiele dieser Art ist die in § 7 aufgestellte Erklärung der Multiplikation ohne weiteres anwendbar. So z. B. bedeutet das Produkt $4 \times \frac{3}{5}$ nach § 8, 1 eine Summe von 4 (gleichen) Summanden, gebildet aus dem Bruche $\frac{3}{5}$, d. h.:

$$4 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung sind gleichnamige Brüche zu addieren. Mit Benutzung von Lehrsatz 1 des vorigen Paragraphen erhält man:

$$\frac{3+3+3+3}{5} = \frac{12}{5}.$$

Mithin ist:

$$4 \times \tfrac{3}{5} = \frac{12}{5}.$$

1) **Lehrsatz:** Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und das erhaltene Produkt durch den Nenner dividiert.

2) Der Multiplikand ist eine ganze Zahl, der Multiplikator dagegen ein Bruch.

Da der Multiplikator einem Grundgesetze der Multiplikation gemäß eine ganze Zahl sein muß (§ 8, 3), so sind Produkte, in welchen dieser Faktor ein Bruch ist, vorläufig widersinnig. Denn nach dem ursprünglichen Begriff der Multiplikation hat z. B. die Aufgabe $\tfrac{3}{4} \times 5$ ℳ wörtlich genommen den Sinn, man soll 5 ℳ $\tfrac{3}{4}$ mal als Summand setzen.

Diese neue Art von Produkten findet ihre Deutung in der Bildung des gebrochenen Multiplikators. Der Bruch $\tfrac{3}{4}$ kann erstens dadurch entstanden aufgefaßt werden, daß man den vierten Teil der Einheit 3mal nimmt. Wenn wir diese Entstehung des Multiplikators der Aufgabe $\tfrac{3}{4} \times 5$ ℳ zugrunde legen, so hat das Produkt folgenden Sinn: Man soll den vierten Teil oder $\tfrac{1}{4}$ des Ganzen, nämlich des Multiplikanden 5 ℳ, mit 3 multiplizieren. Zufolge dieser Auffassung erscheint das vorliegende Produkt als Summe aus 3 Summanden, von denen jeder der vierte Teil von 5 ℳ ist.

$$\tfrac{3}{4} \times 5\,ℳ = \tfrac{5}{4}\,ℳ + \tfrac{5}{4}\,ℳ + \tfrac{5}{4}\,ℳ = 3 \times \tfrac{5}{4}\,ℳ = \frac{15}{4}\,ℳ.$$

Eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplizieren heißt, den Multiplikanden durch den Nenner dividieren und diesen Bruch mit dem Zähler des Multiplikators multiplizieren.

Die zweite Deutung von Produkten, deren Multiplikator eine gebrochene Zahl ist, fließt aus der zweiten Auffassung des Bruches. Der Bruch $\tfrac{3}{4}$ ist gleich dem Quotienten 3 : 4 (§ 52). Aus dieser Auffassung des Bruches geht folgende Gleichung hervor:

$$\tfrac{3}{4} \times 5\,ℳ = \frac{3 \times 5\,ℳ}{4}.$$

Eine Zahl mit einem Bruche multiplizieren heißt, dieselbe mit dem Zähler multiplizieren und das Produkt durch den Nenner dividieren.

Anmerkung. Die arithmetische Redeweise, „eine Zahl mit einem Bruche multiplizieren“, ist eine abgekürzte Sprechweise für die Aufgabe, diese Zahl durch die beiden Rechnungsarten der zweiten Stufe zu verändern. Wenn eine ganze Zahl 20 m durch eine andere, 5, dividiert und der Quotient mit 4 multipliziert werden soll, so bezeichnet die arithmetische Zeichensprache diese rechnerischen Arbeiten kurz durch $\frac{4}{5} \times 20$ m. Dieselbe Schreibart wendet die Arithmetik an, wenn irgend eine ganze Zahl zuerst mit 4 multipliziert und das Produkt durch 5 dividiert werden soll. Die Sprechweise „$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ mal eine (ganze) Zahl“ heißt nichts anderes, als die Zahl durch 4, 5, 8 dividieren. — Dem Anfänger ist es zu empfehlen, sich über die Bedeutung von Produkten dieser Art klar auszusprechen.

Ist der Multiplikator eine gemischte Zahl, so kann man entweder denselben in einen unechten Bruch verwandeln und wie vorhin verfahren oder die gemischte Zahl durch eine Summe, bestehend aus der ganzen Zahl und dem Bruche, darstellen und den Multiplikanden mit dieser Summe multiplizieren, z. B.:

$$5\tfrac{3}{4} \times 3 = \frac{23}{4} \times 3 = \frac{69}{4} = 17\tfrac{1}{4}.$$

$$(5 + \tfrac{3}{4}) \times 3 = 5 \times 3 + \tfrac{3}{4} \times 3 = 15 + 2\tfrac{1}{4} = 17\tfrac{1}{4}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß man in beiden Fällen die Faktoren vertauschen darf und die rechnerischen Arbeiten in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können.

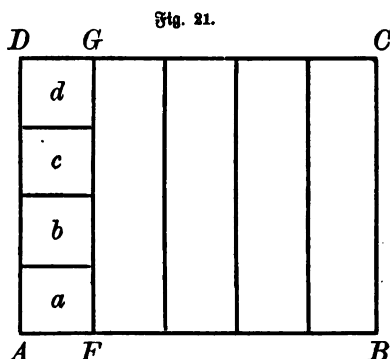
3) Beide Faktoren sind Brüche oder gemischte Zahlen.

Aufgabe: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$. Nach den Erörterungen unter 2) ist der Sinn dieser Aufgabe folgender: Man soll den Multiplikanden $\frac{4}{5}$ durch 3 dividieren und den erhaltenen Bruch mit 2 multiplizieren. Der dritte Teil von $\frac{4}{5}$ giebt $\frac{4}{3 \times 5}$, dies Ergebnis mit 2 multipliziert, liefert:

$$2 \times \frac{4}{3 \times 5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}.$$

Das Produkt $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ läßt sich durch eine Zeichnung veranschaulichen. Man bilde ein Rechteck $ABCD$ (Fig. 21), dessen Grundseite AB den Nenner des Multiplikanden und dessen Höhe AD seinen Zähler versinnlicht. Zerlegt man das Rechteck durch Parallelen zu AD in 5 gleiche Teile, so veranschaulicht ein Streifen die Brucheinheit des Multiplikanden, 2 Teile versinnlichen den Bruch $\frac{2}{5}$ u. s. w. Teilt man einen Streifen in 4 Quadrate, so beträgt jedes ersichtlich den vierten Teil oder $\frac{1}{4}$ von $AFGD$, d. h. $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{5}$. Ein Quadrat ist aber vom ganzen Rechteck $\frac{1}{20}$; mithin ist $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Zwei Quadrate bilden von $AFGD$ die Hälfte, dagegen von der ganzen Figur $\frac{1}{10}$; folglich ist $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$. Vier Streifen versinnlichen den Multiplikanden $\frac{4}{5}$, 2 kleine Rechtecke sind von ersteren $\frac{1}{2}$ und vom Ganzen $\frac{2}{5}$; also ist $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$ u. s. w.

Fig. 21.



Lehrsatz: Brüche werden miteinander multipliziert, indem man sowohl ihre Zähler als ihre Nenner multipliziert und das erste Produkt durch das zweite dividiert.

Die Multiplikation gemischter Zahlen kann auf zweifache Weise bewerkstelligt werden. Man verwandelt die Faktoren in unechte Brüche und wendet auf diese den vorigen Lehrsatz an. In manchen Fällen ist es zweckmäßiger, die Faktoren durch Summen oder Differenzen zu bezeichnen und diese zu multiplizieren. So ist z. B.:

$12\frac{1}{2} \times 12\frac{1}{2} = (12 + \frac{1}{2})^2 = 144 + 12 + \frac{1}{4} = 156\frac{1}{4}$ nach § 16, 2β.

$19\frac{3}{4} \times 19\frac{3}{4} = (20 - \frac{1}{4})^2 = 400 - 10 + \frac{1}{16} = 390\frac{1}{16}$ nach § 16, 4β.

$15\frac{2}{3} \times 14\frac{1}{3} = (15 + \frac{2}{3}) \times (15 - \frac{2}{3}) = 225 - \frac{4}{9} = 224\frac{5}{9}$ nach § 16, 8.

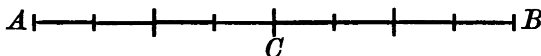
§ 56. Teilen der Brüche durch ganze Zahlen.

Bei Aufgaben dieser Art kommen zwei Fälle inbetracht: a) der Teiler geht im Zähler des Bruches auf, oder, was dasselbe ist, der Zähler ist ein Vielfaches vom Teiler; b) der Divisor geht im Zähler des Bruches nicht auf.

Die Aufgaben der ersten Gruppe sind so leicht, daß sie kaum einer Erörterung bedürfen. Dagegen bereitet die Auffassung des Verfahrens zur Lösung der Beispiele der zweiten Gruppe den Schülern manchmal nicht unerhebliche Schwierigkeit. Gelingt es hier nicht ein vollkommen klares Verständnis des Verfahrens zu gewinnen, so fällt der schwächere Schüler, vom Gesetz der Analogie verleitet, in den Fehler, auch hier den Zähler zu teilen und den Nenner unbeachtet zu lassen, z. B. zu rechnen: $\frac{7}{10} : 4 = 1\frac{3}{4}$.

Beginnen wir mit der Behandlung solcher Aufgaben, in welchen der Dividend ein Stammbruch ist, z. B. mit dem Beispiele $\frac{1}{2} : 2$. Den Dividenden versinnlichen wir durch die

Fig. 22.



Hälfte der Strecke *AB*. Nach der Aufgabe soll der Bruch $\frac{1}{2}$ durch 2 geteilt werden. Diese Teilung führen wir graphisch aus, indem wir das Stück *AC* halbieren. Jeder dieser beiden Abschnitte veranschaulicht die Hälfte von $\frac{1}{2}$; von der ganzen Strecke *AB* beträgt ein jedes Stück den vierten Teil derselben, d. h. es versinnlicht den Bruch $\frac{1}{4}$; mithin ist $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$. Wird nun $\frac{1}{4}$ von *AB* in 2 gleiche Teile geteilt, so enthält die ganze Strecke 8 solcher entstandenen Abschnitte. Jeder der letzteren beträgt vom Ganzen $\frac{1}{8}$, dagegen von einem Viertel der Linie die Hälfte; also ist $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$.

Man kann indes auch durch eine einfache arithmetische Betrachtung auf Grundlage der Wertbeständigkeit des Bruches, diese Aufgaben auf die Beispiele der ersteren Art zurückführen. Gegeben sei die Aufgabe $\frac{1}{8} : 2$. Wir erweitern den Dividenden so, daß der Teiler im Zähler aufgeht. Die kleinste Zahl, welche durch 2 ohne Rest teilbar ist, heißt 2. Multiplizieren wir den Zähler und den Nenner des Bruches mit 2, wodurch sein Wert

nach § 53 unverändert bleibt, so entsteht der Bruch $\frac{2}{6}$. Setzt man nun an Stelle des Bruches $\frac{1}{3}$ den Bruch $\frac{2}{6}$ als Dividenden, so heißt die Aufgabe $\frac{2}{6} : 2$, deren Behandlung bekannt ist. Man sieht, daß der zu teilende Bruch mit der Zahl erweitert werden muß, welche den Divisor darstellt.

Ist der Zähler des zu teilenden Bruches von der Einheit verschieden, so kann man die Brucheinheit, den Stammbruch, teilen und das Ergebnis mit dem Zähler des Dividenden multiplizieren, z. B. $\frac{4}{5} : 3$; Lösung:

$$\frac{1}{5} : 3 = \frac{1}{15}; \quad \frac{4}{5} \text{ oder } 4 \times \frac{1}{5} : 3 = 4 \times \frac{1}{15} = \frac{4}{15}.$$

Indessen leistet auch hier die Versinnlichung des Verfahrens gute Dienste, weil dadurch die grundlegende äußere und innere Anschauung erneuert und befestigt wird. Wir versinnlichen den Dividenden durch eine Strecke und teilen das erste Fünftel derselben in 3 gleiche Teile. Einer dieser Teile beträgt nach dem Vorigen $\frac{1}{15}$ des Ganzen. Nimmt man vom zweiten Fünftel ebenfalls den dritten Teil, so hat man zusammen $\frac{2}{15}$; mithin ist $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{15}$. Teilt man jeden Abschnitt der den Dividenden versinnlichenden Strecke in 3 gleiche Teile, so ist ersichtlich $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}$. Da in sämtlichen Ergebnissen der Zähler des Dividenden unverändert geblieben, dagegen sein Nenner mit dem Divisor multipliziert worden ist, so besteht der

Lehrsatz: Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man seinen Nenner mit der Zahl multipliziert.

§ 57. Dividieren durch einen Bruch.

Eine reine oder benannte ganze Zahl in $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}$ u. s. w. gleiche Teile zu zerlegen, hat keinen Sinn. Das Dividieren kann also in diesem Falle nicht als eigentliches Teilen aufgefaßt werden, vielmehr sind Divisionen dieser Art als Messen zu betrachten. Die Aufgabe $10 : \frac{2}{5}$ bedeutet: man soll untersuchen, wie oft $\frac{2}{5}$ in 10 enthalten sind. Eine klare Auffassung derartiger Zahlverbindungen gewinnt man durch wirkliches Messen. Man untersucht z. B., wie oft eine Strecke von

$\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ dm sich auf einer andern Länge, 2 dm, abtragen läßt. Da eine Zahl durch eine andere nur unter der Bedingung gemessen werden kann, daß beide gleichartig sind, bezw. auf gleiche Benennung gebracht werden können, so müssen wir, um das Ergebnis der Messung durch Rechnung zu finden, die zu messende Zahl mit dem Maß gleichnamig machen. In dem Beispiele $10 : \frac{2}{5}$ oder $\frac{2}{5} \div 10$ muß also der Dividend 10 in Bruchheinheiten des Divisors aufgelöst, verwandelt werden. Man erhält alsdann die Aufgabe $\frac{2}{5} \div \frac{50}{5}$, welche gerade so gerechnet wird, wie $2 \div 50$. (Vergleiche § 11.)

Das Gesetz über das Dividieren einer ganzen Zahl durch einen Bruch läßt sich leicht durch Benutzung des Gesetzes über die Wertbeständigkeit (§ 53) herleiten. Wir können die Aufgabe $7 : \frac{4}{5}$ darstellen, indem wir den Doppelpunkt durch den Bruchstrich ersetzen; dann ist:

$$7 : \frac{4}{5} = \frac{7}{\frac{4}{5}}.$$

Wenden wir auf diesen Bruch das Gesetz § 53 an und multiplizieren, um den Nenner des Bruches $\frac{4}{5}$ fortzuschaffen, Zähler und Nenner mit 5, so ist:

$$7 : \frac{4}{5} = \frac{7 \times 5}{4} = 7 \times \frac{5}{4}.$$

Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn der Dividend ein Bruch oder eine gemischte Zahl ist. In allen Fällen stellt sich das Ergebnis als ein Produkt aus dem Dividenden und dem umgekehrten Wert des Divisors dar. Wir haben also den

Lehrsatz: Ein Ausdruck (ganze Zahl, Bruch, gemischte Zahl) wird durch einen Bruch dividiert, indem man den Dividenden mit dem umgekehrten Wert des Divisors multipliziert.

Dezimalbrüche. Wenn man in der Zahl 11111 in der Richtung von links nach rechts fortschreitend das dekadische Zahlengesetz über die Ordnung der Einer fortsetzt, so müssen Zahlordnungen entstehen, welche Bruchheinheiten sind,

nämlich Zehntel, Hundertstel, Tausendstel u. s. w. Bezeichnen wir die Grenze zwischen den Ganzen und diesen neuen dekadischen Einheiten durch ein Komma, so ist:

$$11111{,}111 = 11111 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$$

$$= 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}.$$

Durch Erweiterung des dekadischen Systems über die Ordnung der Einer entstehen zehnteilige oder Dezimalbrüche. Man nennt Brüche, deren Zähler beliebige ganze Zahlen und deren Nenner Potenzen der Grundzahl eines Zahlensystems sind, **Systembrüche**. Die Dezimalbrüche gehören zu den Systembrüchen, sie sind Brüche, deren Nenner eine Potenz der Grundzahl des dekadischen Systems ist. Zur Unterscheidung werden die Brüche, deren Nenner eine beliebige ganze Zahl sein kann, gewöhnliche Brüche genannt. Die allgemeine Form eines echten Dezimalbruches ist $\frac{a}{10^n}$. Die zehnteiligen Brüche sind im wesentlichen nicht von den gewöhnlichen Brüchen verschieden. Es können daher alle Gesetze der letztern ohne weiteres auf die Dezimalbrüche angewendet werden. Mit Rücksicht auf die einfache Schreibart der zehnteiligen Brüche — man braucht nämlich nur ihre Zähler anzuschreiben — ist der Wortlaut der Gesetze über die Rechnung mit ihnen von den Bruchregeln etwas abweichend. So lautet z. B. das Gesetz über die Multiplikation der Dezimalbrüche: Man multipliziert Dezimalbrüche miteinander, indem man sie ohne Rücksicht auf das Komma wie ganze Zahlen multipliziert und von dem Produkt so viele Stellen abschneidet, als beide Faktoren zusammen enthalten. Die Dezimalbrüche ohne Rücksicht auf das Komma multiplizieren heißt aber nichts anderes, als ihre Zähler multiplizieren. Und indem man von dem Produkt so viele Stellen abschneidet, als in den Faktoren vorhanden sind, teilt man durch das Produkt der Nenner. Man sieht dies klar ein, wenn man die zu multiplizierenden Dezimalbrüche in Form gewöhnlicher Brüche schreibt und letztere

multipliziert. So ist z. B.:

$$4{,}5 \times 0{,}24 = \tfrac{45}{10} \times \tfrac{24}{100} = \frac{45 \cdot 24}{10^3};$$

allgemein:

$$\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} = \frac{a \cdot b}{10^{n+m}}.$$

Das praktische Rechnen mit Dezimalbrüchen ist aus der Ziffernarithmetik bekannt. Über Abkürzungen beim Rechnen mit denselben sehe man den Anhang.

Die Dezimalbrüche können durch das Meter und seine Unterabteilungen dm, cm und mm passend versinnlicht werden.

§ 58. Erläuterung der Entstehung der Brüche an unserer bildlichen Darstellung der Zahlenreihe.

Die natürliche Zahlenreihe 1 bis ∞ ist für alle direkten Operationen der vier Grundrechnungen, nämlich der Addition und der Multiplikation, ausreichend. Dagegen sind wir nicht imstande, mit dieser Zahlenreihe alle Aufgaben der der Multiplikation entgegengesetzten Rechnungsart (Division) zu lösen. So z. B. verlangt die Lösung der Aufgabe 5 : 2 nach unsern Erläuterungen bei der Division (§ 11), daß man von dem die Zahl 5 versinnlichenden Punkt des Zahlenbildes aus den Anfangspunkt 0 durch zweimaliges Rückwärtsschreiten von gleicher Länge erreiche. Nehmen wir als Schrittweite 2 Punkte der Reihe, so gelangen wir an den ersten Punkt. Eine Schrittlänge von 3 Strecken würde uns über das Ziel 0 hinaus führen. Folglich müssen wir die Schrittlänge größer als 2 und kleiner als 3 nehmen. Wie sich leicht ergiebt, werden wir obige Aufgabe mit Hilfe unserer Darstellung lösen können, wenn wir in der Mitte zwischen dem ersten und zweiten Punkt einen neuen Punkt einschalten. Um 7, 9, 11, überhaupt alle ungeraden Zahlen, durch 2 teilen zu können, ist es notwendig, zwischen je zwei Punkte der Zahlenreihe einen Punkt zu setzen. Jeder der eingeschalteten Punkte stellt eine neue, zwischen je zwei ganzen Zahlen liegende Zahlform dar. Da jeder eingefügte Punkt die Strecke zwischen zwei aufeinander

folgenden Zahlen in zwei gleiche Teile teilt, so nennt man einen solchen Teil einhalb. Der erste zwischen 0 und 1 eingeschaltete Punkt veranschaulicht also die Zahl „einhalb", die man Bruch nennt. Eine Bruchzahl besteht aus Zähler und Nenner. Der letztere deutet an, in wie viele gleiche Teile die Strecke zwischen zwei Punkten, die ganze Zahlen versinnlichen, geteilt ist, er nennt die Anzahl der gleichen Teile. Der Zähler giebt die Anzahl der genommenen Teile an, er zählt sie. Ein Bruch wird dargestellt, indem man die Zahlen, welche Zähler und Nenner bezeichnen, „senkrecht" untereinander schreibt und dieselben durch einen „wagerechten" Strich trennt. Der Bruch „einhalb" wird also „$\frac{1}{2}$" geschrieben. — Die übrigen eingeschalteten Punkte versinnlichen durch ihren Abstand von Null die Zahlen $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ u. s. f. Man nennt solche aus einer ganzen Zahl und einem Bruche bestehende Zahlformen „gemischte Zahlen".

Nach diesen Erörterungen ergiebt sich nun leicht die Schrittlänge, die wir nehmen müssen, um die Aufgaben:

$$5:2, \quad 7:2 \quad \text{u. s. w.}$$

mit Hilfe unserer Zahlen-Abbildung zu lösen, d. h. von 5, 7 u. s. w. aus in 2 Schritten nach 0 zu gelangen. Die Längen der Schritte sind offenbar $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ Strecken u. s. f. Folglich ist:

$$5:2 = 2\tfrac{1}{2}; \quad 7:2 = 3\tfrac{1}{2}.$$

Wenn wir in ähnlicher Weise die Lösungen der arithmetischen Aufgaben:

$$14:3, \quad 14:4, \quad 14:5$$

an unserm Zahlenbilde zur Anschauung bringen wollen, so müssen wir im ersten Falle vorerst zwei neue Punkte zwischen den Punkten der Zahlen 1 bis 14 einschalten. Wir werden dadurch auf die Brüche $\frac{1}{3}$ bis $\frac{42}{3}$ geführt. Bei der zweiten Aufgabe sind 3 neue und bei der folgenden 4 neue Punkte, allgemein beim Teiler n sind $n - 1$ Punkte in gleichen Abständen voneinander einzustellen. Hieraus ergiebt sich: Um alle Divisionen ausführen zu können, müssen wir zwischen je zwei ganze Zahlen unsers Zahlenbildes und zwar auf der

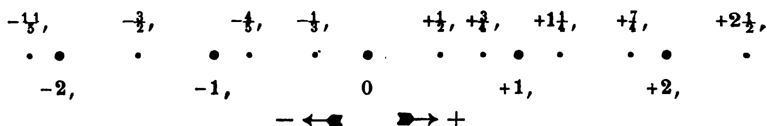
positiven und auf der negativen Seite desselben unzählig viele Punkte einschalten.

Da aber der Divisor *n* eine sehr große Zahl bezeichnen kann, so besteht die durch die Division erzeugte Erweiterung der Zahlenreihe darin, daß die Punkte der letzteren um eine sehr bedeutende Anzahl vermehrt werden.

Jeder eingeschaltete Punkt versinnlicht eine positive oder eine negative Bruchzahl, d. h. er zählt vom Nullpunkt aus nach rechts oder nach links eine bestimmte Anzahl gebrochener Einheiten oder Stammbrüche ab. Dies gilt indes auch von den ursprünglichen Punkten, weil die ganzen Zahlen in Form von unechten Brüchen dargestellt werden können. Je größer der Nenner der Brüche ist, desto näher liegen die dieselben zur Anschauung bringenden Punkte, und der Abstand zwischen zwei Punkten des Bildes ist um so kleiner, je geringer die arithmetische Differenz der Zahlen ist, welche die Punkte vorstellen.

Die Zahlenreihe umfaßt also nicht nur alle positiven und negativen ganzen Zahlen, sondern auch alle Brüche und gemischte Zahlen positiver und negativer Art.

In der folgenden Abbildung sind einige Brüche veranschaulicht.



§ 59. Erweiterung des Bruchbegriffes.

In § 11 ist die Einschränkung gemacht worden, daß in dem Quotienten $a:b$ der Dividend ein Vielfaches vom Divisor sei, damit der Ausdruck eine natürliche Zahl bezeichne. Die Rechengesetze über den Quotienten in § 13 sind auch nur unter dieser Voraussetzung bewiesen worden. Wenn a und b eine natürliche Zahl bezeichnen, so geht in sehr vielen Fällen der Divisor im Dividenden nicht auf, und es giebt alsdann keine

natürliche Zahl, welche mit b multipliziert a liefert. Um nun diese Fälle nicht aus der Arithmetik ausschließen zu müssen und die Gesetze über Quotienten allgemein benutzen zu können, ist eine Erweiterung des Quotientenbegriffes notwendig. Man nennt den Ausdruck $\frac{a}{b}$, falls er keine Zahl der natürlichen Zahlenreihe (§ 1) bezeichnet, einen Bruch; sein Dividend heißt Zähler und sein Divisor der Nenner des Bruches. Die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe erhalten nun zum Unterschiede von den gebrochenen Zahlen den Namen „ganze Zahlen" oder kurz Ganze. Nach § 52 bedeutet der Bruch $\frac{4}{5}$ die Summe aus vier gleichen Teilen, von welchen jeder den fünften Teil der Einheit beträgt; also:

$$\tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5}.$$

Aus diesem Begriff des Bruches $\frac{4}{5}$ fließt aber unmittelbar die Auffassung:

$$\tfrac{4}{5} = 4 \times \tfrac{1}{5}.$$

Bereits in § 53 ist geometrisch und arithmetisch der innere Zusammenhang zwischen Bruch und Quotienten an einzelnen Brüchen aus natürlichen Zahlen erläutert worden. Es erübrigt nun noch, die Gleichheit zwischen dem Quotienten $a:b$ und dem Bruche $\frac{a}{b}$ (lies a $b$tel) allgemein zu beweisen.

Der allgemeine Bruch $\frac{a}{b}$ bezeichnet der Definition (§ 52) gemäß die Summe von a gleichen Summanden der in b Teile zerlegten Einheit, oder:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Nach dem in § 11 gegebenen Begriff der Division bedeutet der Quotient $a:b$ zunächst, die Zahl a in b gleiche Teile zu zerlegen. Der Dividend enthält aber eine Summe von a Einheiten; mithin ist:

$$a:b = (\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots\cdots + 1}_{(a \text{ Summanden})}):b.$$

Wendet man auf die von Klammern eingeschlossene Summe den ersten Lehrsatz in § 13 an, so entstehen Stammbrüche mit dem

Nenner b, deren Anzahl gleich a ist. Die Summe dieser Brucheinheiten wird aber kurz durch $a \cdot \frac{1}{b}$ oder $\frac{a}{b}$ dargestellt. Mithin ist der Quotient $a:b$ gleich dem Bruche $\frac{a}{b}$. Jeder Bruch ist seinem Werte nach nichts anderes als ein formeller, d. h. unentwickelter oder unausgeführter Quotient. Es kann also auch umgekehrt jeder Bruch als ein Quotient aufgefaßt werden, der durch Division des Zählers durch den Nenner entsteht. Bei Stammbrüchen fließen die Auffassungen als Bruch und als Quotienten in eine einzige zusammen; denn der Ausdruck $\frac{1}{a}$ bezeichnet nur die Teilung der Einheit in a gleiche Teile. Da es für das Ergebnis der Rechnung einerlei ist, ob man einen Ausdruck von der Form $\frac{a}{b}$ als Bruch oder als Quotienten auffaßt, so werden in der allgemeinen Arithmetik oft beide Benennungen in demselben Sinne gebraucht.

Der Bruchbegriff ist für positive und negative Zahlen ebenso gültig, wie für natürliche. Teilt man die positive und die negative Einheit ± 1 in b gleiche Teile, so entstehen die Brucheinheiten $+\frac{1}{b}$, $-\frac{1}{b}$, und wenn man von jeder Art a Teile zu einer Zahl vereinigt, so erhält man die Brüche $+\frac{a}{b}$ und $-\frac{a}{b}$. Wir haben also im Gegensatz zur positiven und negativen Einheit die positive und negative Brucheinheit,

$$\frac{\pm 1}{b} = \pm \frac{1}{b},$$

zu unterscheiden. Nach Kenntnis der algebraischen Zahlen (§ 32) kann ein Buchstabe a jede positive und negative Zahl der erweiterten Zahlenreihe bezeichnen. Die Verbindung der ersten und zweiten Erweiterung des Zahlbegriffs führt zu unausgeführten Quotienten, deren Dividend und Divisor algebraische Zahlen sind, also zu Quotienten von der Form $\frac{\pm a}{\pm b}$. Die Bedeutung dieser Quotienten ergiebt sich aus dem Hauptgesetze in § 40; es ist nämlich:

$$1)\ \frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}; \qquad 2)\ \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b};$$

$$3)\ \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}; \qquad 4)\ \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}.$$

Man kann also den Quotienten zweier algebraischen Zahlen durch einen positiven oder negativen Bruch darstellen.

Die Gleichung $a:b = \frac{a}{b}$ gilt also auch dann, wenn a und b beliebige relative Zahlen der allgemeinen Zahlen bezeichnen. Wir haben also den

Lehrsatz: Es besteht Gleichheit zwischen einem Quotienten $a:b$ und demjenigen Bruche $\frac{a}{b}$, dessen Zähler gleich dem Dividenden und dessen Nenner dem Divisor des Quotienten gleich ist.

Der allgemeine Quotient oder Buchstabenbruch $\frac{a}{b}$ ist in einem viel allgemeineren Sinne aufzufassen als ein gewöhnlicher Bruch.

Nach unseren bis jetzt gewonnenen Zahlbegriffen sind im Quotienten $a:b$ folgende besondere Zahlformen enthalten:

1) die positive und negative Einheit, ± 1, wenn derselbe die Form $\frac{\pm a}{\pm a}$ annimmt;

2) bezeichnet er die von 1 verschiedene ganze Zahl der erweiterten Zahlenreihe, wenn a ein Vielfaches von b ist, z. B. $\frac{\pm 16}{\pm 2} = \pm 8$;

3) die gebrochene Zahl, wenn der Dividend kleiner als der Divisor, also $a < b$ ist; z. B. $\pm 5 : \pm 6 = \pm \frac{5}{6}$. Nur wenn a und b natürliche Zahlen bezeichnen, ist $\frac{a}{b}$ ein gewöhnlicher Bruch;

4) die gemischte Zahl, wenn $a > b$ ist; z. B.:

$$\pm 20 : \pm 3 = \pm 6\tfrac{2}{3};$$

5) können a und b auch die positive und negative gebrochene Zahl ausdrücken. Der Wert des Quotienten stellt dann eine der unter 1 bis 4 angegebenen Zahlformen dar. Ist z. B. $a = \frac{4}{5}$ und $b = \frac{9}{10}$, so ist $a:b = \frac{4}{5} : \frac{9}{10} = \frac{8}{9}$.

§ 60. Fortsetzung des Rechnens mit Brüchen.

Folgerungssatz: Aus dem Lehrsatze des vorigen Paragraphen ergiebt sich unmittelbar, daß alle Rechengesetze, welche für den ursprünglichen Quotienten $a:b$ bewiesen worden sind, auch für Brüche Geltung haben.

Man erhält die besondern Rechengesetze für Brüche, wenn man in den Gesetzen über Quotienten an Stelle von Dividend und Divisor die Bezeichnungen Zähler und Nenner setzt.

Die Grundgesetze über den Bruch lauten:

1) Multipliziert man einen Bruch mit seinem Nenner, so erhält man seinen Zähler. (§ 16, 1.)

2) Dividiert man den Zähler eines Bruches durch den Bruch selbst, so erhält man seinen Nenner.

3) Haben gleichwertige Brüche denselben Zähler, so sind auch ihre Nenner gleich.

4) Haben Brüche mit demselben Nenner gleichen Wert, so sind auch ihre Zähler einander gleich.

5) Der Wert eines Bruches bleibt ungeändert, wenn man seinen Zähler und seinen Nenner mit derselben Zahl multipliziert oder beide durch dieselbe Zahl dividiert. (Man vergleiche § 16 die Lehrsätze 1, 3, 7, 8 und 10.)

Die vier ersten Rechnungsarten mit Brüchen sind bereits in den §§ 54 bis 57 behandelt. Dieselben Gesetze, welche dort selbständig entwickelt worden sind, ergeben sich aufgrund des letzten Folgerungssatzes aus den Lehrsätzen 2, 4, 6, 7, 9, 10, 11 und 12 in § 13.

Das Potenzieren eines Bruches ergiebt sich aus dem 7) Lehrsatze in § 17: Ein Bruch wird potenziert, indem man seinen Zähler und seinen Nenner mit dem Exponenten potenziert. So ist z. B.:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}; \quad \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}; \quad \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2}.$$

Jede (ganze) Potenz eines Bruches ist stets wieder ein Bruch. Der Potenzwert aller echten Brüche ist kleiner als 1,

also wieder ein echter Bruch. Die Potenzierung eines echten Bruches liefert einen um so kleineren Wert, je größer der Exponent ist. Der Ausdruck $\left(\frac{1}{a}\right)^{\infty}$ hat den Wert Null; denn

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\infty} = \frac{1^{\infty}}{a^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \text{nach § 40.}$$

§ 61. Wurzelausziehen aus Brüchen.

Zufolge § 26, 3 wird ein Bruch radiziert, indem man sowohl seinen Zähler als seinen Nenner durch den Wurzelexponenten radiziert und die erste Wurzel durch die zweite dividiert, z. B.:

$$\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}; \qquad \sqrt{\frac{49}{144}} = \frac{7}{12}; \qquad \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}.$$

Ist der Radikand ein unechter Dezimalbruch, z. B. 72,25, so teilt man denselben zunächst vom Dezimalkomma aus nach links und rechts in zweizifferige Klassen (§ 19). Falls die letzte der Abteilungen rechts vom Komma nur eine Ziffer enthält, kann dieselbe durch eine Null ergänzt werden. Das Rechnungsverfahren gestaltet sich ganz auf dieselbe Weise wie bei ganzen Zahlen (§ 20). Man rechnet ohne Rücksicht auf das Dezimalkomma und setzt in der Wurzel dasselbe, sobald die erste Dezimalstelle zum Reste hinzugefügt werden soll, z. B.:

$$\sqrt{12{,}6736} = \overset{a+b}{\underbrace{3{,}5}_{a'}}\underbrace{6}_{b'}.$$

$$\begin{array}{rr}
a^2 = 3^2 = & 9 \\
2a\ 2a = 6 \div & \overline{36} \\
2ab = 6 \cdot 5 = & 30 \\
 & \overline{67} \\
b^2 = 5^2 = & 25 \\
2a' = 70: & \overline{423} \\
2a'b' = 70 \cdot 6 = & 420 \\
 & \overline{36} \\
b'^2 = 6^2 = & 36 \\
 & \overline{0}
\end{array}$$

Beispiel der Quadratwurzel eines echten Dezimalbruches:

$$\sqrt{0,00|72|25} = 0,085.$$

$$\begin{array}{rl} a^2 = 8^2 = & 64 \\ 2a = 16: & \overline{82} \\ 2ab = 16 \cdot 5 = & 80 \\ & \overline{25} \\ b^2 = 5^2 = & 25 \\ & \overline{0} \end{array}$$

Man kann den Dezimalbruch auch durch einen gewöhnlichen Bruch darstellen, dessen Nenner eine gerade Potenz von 10 ist, und diesen Bruch radizieren. So ist z. B.:

$$\sqrt{5,76} = \frac{\sqrt{576}}{\sqrt{10^2}} = \frac{24}{10} = 2,4;$$

$$\sqrt{46,9225} = \frac{\sqrt{469225}}{\sqrt{10^4}} = \frac{685}{100} = 6,85.$$

Gemäß § 26, 3 wird aus einem gewöhnlichen Bruche die Kubikwurzel gezogen, indem man dieselbe aus seinem Zähler und seinem Nenner zieht, z. B.:

$$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{3}{5}; \qquad \sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}.$$

Beim Ausziehen der Kubikwurzel aus einem unechten Dezimalbruche teile man denselben vom Dezimalkomma aus nach links und rechts in dreizifferige Abteilungen. Ein echter Dezimalbruch wird vom Komma aus in Klassen geteilt. Das Komma in der Wurzel setzt man, sobald die letzte Ziffer der Ganzen zum Reste hinzugefügt worden ist. Die Ausführung der Rechnung geschieht wie in § 24, z. B.:

	$\sqrt[3]{401,\vert 947\,272} = \underset{a'\quad b'}{\overset{a+b+c}{7{,}3\,8}}$
$a^3 = 7^3 =$	343
$3a^2 = 147 \div$	58 9
$3a^2b = 147 \cdot 3 =$	44 1
	14 84
$3ab^2 = 21 \cdot 9 =$	1 89
	12 957
$b^3 = 3^3 =$	27
$3a'^2 = 15987 \div$	12 930 2
$3a'^2b' = 15987 \cdot 8 =$	12 789 6
	140 67
$3a'b'^2 = 3 \cdot 73 \cdot 8^2 =$	140 16
	512
$b'^3 = 8^3 =$	512
	0.

§ 62. Rechnung mit negativen Potenzen.

Nach Formel II § 17 bezeichnet die Differenzen-Potenz a^{m-n} den Quotienten $\frac{a^m}{a^n}$. Man benennt im allgemeinen jede Potenz nach ihren Exponenten; je nachdem die Differenz der Exponenten $m - n$ eine positive oder negative ganze Zahl oder Null bezeichnet, heißt die Potenz selbst **positiv** oder **negativ** oder die **Nullpotenz**. Die positive und die Nullpotenz sind in den §§ 17, 41 und 42 behandelt worden. Es erübrigt nun noch, die Rechengesetze für negative Potenzen aufzustellen und deren Richtigkeit zu beweisen.

Die § 42 (Seite 118) gegebene Definitionsformel der negativen Potenz, nämlich:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

kann nach Kenntnis der Brüche in folgender Weise ausgesprochen werden:

Jede negative Potenz ist gleich dem Werte des aus der Basis a gebildeten Stammbruches $\frac{1}{a}$ potenziert mit dem positiven Exponenten.

In dieser Auffassung erscheint auch die negative Potenz als ein Produkt gleicher Faktoren (§ 14). Es ist nämlich:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a} \quad (n \text{ Faktoren}).$$

Ist die Basis ein Quotient (Bruch) $\frac{a}{b}$, so gilt die Formel:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Man kann also allgemein den Exponenten entgegengesetzt setzen, wenn die Grundzahl den umgekehrten Wert erhält.

Aus der Definitionsformel $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ergiebt sich durch Vertauschung des Divisors mit dem Quotienten (§ 12, S. 41) $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$. Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen kann man jede Potenz aus dem Nenner in den Zähler (und umgekehrt) schaffen, wenn man dem Exponenten das entgegengesetzte Vorzeichen giebt, z. B.:

$$\frac{a^3}{b^2} = a^3 b^{-2}; \qquad \frac{x^2}{3y} = \tfrac{1}{3} x^2 y^{-1}; \qquad \frac{5a^2 b^{-4} c^{-2}}{c^{-3} d^{-2}} = \frac{5a^2 c^3 d^2}{b^4 c^2}.$$

Die in den §§ 17 und 41 für Potenzen mit natürlichen Exponenten bewiesenen Gesetze haben auch für **negative** Potenzen Geltung. Diese Wahrheit geht schon daraus hervor, daß die Bedeutung der negativen Potenzform aus der positiven Potenz hervorgeht, wenn wir Formel II § 17 für alle ganze Zahlenwerte gelten lassen und $n > m$ ist. Man hat alsdann:

$$a^m : a^n = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Man kann diese Rechengesetze aber auch für negative Potenzen auf Grundlage ihrer Definitionsformel noch besonders beweisen. Die Beweise werden in der Weise geführt, daß man die negative Potenz durch die gleichwertige positive ersetzt, auf diese die Potenzgesetze anwendet und schließlich das gewonnene Ergebnis in Form einer negativen Potenz ausdrückt.

Wir lassen hier die Formeln für die Rechnung mit negativen Potenzen nebst den Beweisen folgen:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} 1) & a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}. \\ 2) & a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)}. \end{cases}$$

Beweise:

$$1)\quad a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

$$2)\quad a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}.$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} 1) & a^m : a^{-n} = a^{m+n}. \\ 2) & a^{-m} : a^n = a^{-(m+n)}. \\ 3) & a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}. \end{cases}$$

Beweise:

$$1)\quad a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot \frac{a^n}{1} = a^{m+n}.$$

$$2)\quad a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}.$$

$$3)\quad a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

$$\text{III.}\quad a^{-n} \cdot b^{-n} = (ab)^{-n}.$$

Beweis:

$$a^{-n} \cdot b^{-n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{(ab)^n} = (ab)^{-n}.$$

$$\text{IV.}\quad a^{-n} : b^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Beweis:

$$a^{-n} : b^{-n} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n}\ ^{*)} = \frac{1}{(a:b)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}.$$

$$\text{V.}\quad \begin{cases} 1) & (a^{-n})^m = a^{-nm}. \\ 2) & (a^n)^{-m} = a^{-nm}. \\ 3) & (a^{-n})^{-m} = a^{nm}. \end{cases}$$

---

*) Oder: $\frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}.$

Beweise:

$$1)\quad (a^{-n})^m = \left(\frac{1}{a^n}\right)^m = \frac{1}{a^{nm}}\,^{*)} = a^{-nm}.$$

$$2)\quad (a^n)^{-m} = \frac{1}{(a^n)^m} = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-nm}.$$

$$3)\quad (a^{-n})^{-m} = \left(\frac{1}{a^n}\right)^{-m} = \left(\frac{a^n}{1}\right)^{m\,**)} = a^{nm}.$$

§ 63. Bruchpotenzen.

Bisher haben wir uns mit Potenzen beschäftigt, deren Exponenten ganze Zahlen sind. Nach der zweiten Erweiterung des Zahlenbegriffs müssen wir uns auch die Bedeutung von Potenzformen klar legen, deren Exponenten Brüche sind. Zu der III. Formel des § 27 ist (S. 86) die Bemerkung gemacht worden, daß der Potenzexponent $m:n$ eine natürliche Zahl bezeichnen solle und daher m ein Vielfaches von n sein müsse. Lassen wir jetzt diese Einschränkung fallen und die bezeichnete Formel für beliebige positive Zahlenwerte von m und n gelten, so fließen aus dieser Gleichung, wenn n in m nicht aufgeht, Potenzen mit **gebrochenen** Exponenten oder Bruchpotenzen. So ist z. B. zufolge dieser Formel:

$$\sqrt[4]{64^2} = 64^{\frac{2}{4}};\qquad \sqrt[4]{81^3} = 81^{\frac{3}{4}};\qquad \sqrt[3]{27^2} = 27^{\frac{2}{3}};$$

allgemein:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Bruchpotenzen entstehen durch Radizierung einer Potenz, wenn der Wurzelexponent im Potenzexponenten nicht aufgeht. Zur Unterscheidung nennen wir von jetzt an jede Potenz, deren Exponent eine ganze Zahl ist, eine ganze Potenz. Da die Bildung eines Produktes aus $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$,

---

*) Nach § 15, 4 und § 17, 7.

**) Zufolge der Formel:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

$\frac{1}{4}$, $\frac{m}{n}$ gleichen Faktoren keinen Sinn giebt, sinnlos ist, also diese neue Potenzform durch den ursprünglichen Potenzbegriff (§ 14) nicht gedeutet werden kann, so sind die für ganze Potenzen bewiesenen Gesetze auf Bruchpotenzen nicht ohne weiteres anwendbar. Hierin liegt nun noch kein Grund, Potenzen mit Bruchexponenten aus der allgemeinen Arithmetik auszuschließen. Vielmehr erfordert die allgemeine Gültigkeit der arithmetischen Rechengesetze auch die Betrachtung dieser neuen Potenzform, da die obige Bedingung, daß $\frac{m}{n}$ eine natürliche Zahl bezeichnen solle, den Rechner bei Anwendung der Potenzgesetze durch die jedesmalige Untersuchung, ob der Quotient $m:n$ wirklich eine ganze Zahl bezeichne, hemmen würde. Indem wir aber diese Bedingung jetzt aufheben, erweitern wir den Potenzbegriff dahin, daß der Exponent jede beliebige Zahl der erweiterten Zahlenreihe (§ 58) sein kann.

a) Potenzen mit positiven Bruchexponenten. Die Bedeutung einer Potenz mit gebrochenen positiven Exponenten wird durch die Umkehrung der Formel III, also durch die

Definitionsformel I: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

festgesetzt. Dieselbe besagt, daß durch eine Bruchpotenz zwei inverse Operationen dritter Stufe angezeigt werden, nämlich die Potenzierung durch den Zähler m und die Radizierung durch den Nenner n des Bruchexponenten.

Vorstehende Gleichung spricht folgende Definition (Feststellung) aus: Eine Bruchpotenz ist derjenigen Wurzelgröße gleich, welche die mit dem Zähler potenzierte Grundzahl zum Radikanden und den Nenner des Potenzexponenten zum Wurzelexponenten hat. Da nach Formel IV § 27

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

ist, so hat man ferner Definitionsformel II:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a} \text{ (m Faktoren).}$$

Eine Zahl mit einem Bruche $\frac{m}{n}$ potenzieren heißt, dieselbe durch den Nenner n radizieren und die erhaltene Wurzel $\sqrt[n]{a}$ mit dem Zähler m potenzieren. Aus der Definitionsformel I folgt für $m = 1$,

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Es ist daher z. B.:

$$64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8; \quad 125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16;$$

$$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27.$$

Das Gesetz über die Wertbeständigkeit eines Bruches (§ 53) gilt auch für die Bruchpotenz; denn es ist:

$$a^{\frac{mx}{nx}} = \sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{(nach § 26)}.$$

Das Rechnen mit Bruchpotenzen unterliegt denselben Gesetzen, welche für ganze Potenzen bestehen. Die Formeln, welche die Rechengesetze für gebrochene Potenzen aussprechen, werden mit Hilfe der Definitionsformel I bewiesen. Man drückt die Bruchpotenzen in Wurzelgrößen aus, giebt diesen nach § 26 gleiche Wurzelexponenten, wendet auf diese Ausdrücke die entsprechenden Wurzelgesetze (§ 27) an und drückt das Ergebnis in Bruchexponenten aus.

$$\text{I.} \quad a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Beweis:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}}{}^{*)} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$

$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

$$\text{II.} \quad a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

---

*) Man kann auch zuerst die Bruchexponenten gleichnamig machen:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} \quad \text{u. s. w.}$$

Beweis:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}}$$

$$= a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

$$\text{III.} \quad a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}}.$$

Beweis:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m} = ab^{\frac{m}{n}}.$$

$$\text{IV.} \quad a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Beweis:

$$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} \ (\S\ 27, 4) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

$$\text{V.} \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

Beweis:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} \quad (\S\ 27, 7)$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mp}} \ (\S\ 27, 8) = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

Nach der II. Definitionsformel der Bruchpotenz:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

ist unter dem Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ ein Produkt aus m gleichen Faktoren zu verstehen, von denen jeder gleich $\sqrt[n]{a}$ ist. Durch diese Auffassung ist also die gebrochene Potenz der ursprünglichen Erklärung (§ 17) unterworfen, und folglich müssen alle Lehrsätze über ganze Potenzen, welche ja auf dieser Definition beruhen, auch unmittelbar für Bruchpotenzen gültig sein. Man kann mit Hilfe obiger Definitionsformel auch die Richtigkeit dieser Behauptung für jede der vorhin bewiesenen V Formeln noch besonders darlegen. So ist z. B.:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{np}{nq}} = \left(\sqrt[nq]{a}\right)^{mq} \cdot \left(\sqrt[nq]{a}\right)^{np}.$$

Diese beiden zu multiplizierenden Ausdrücke sind Potenzen, welche die Wurzel $\sqrt[nq]{a}$ zur Basis haben. Wendet man auf diese Zahlverknüpfung den 1) Lehrsatz § 17 an, so ist:

$$\left(\sqrt[nq]{a}\right)^{mq} \cdot \left(\sqrt[nq]{a}\right)^{np} = \left(\sqrt[nq]{a}\right)^{np+mq}.$$

Für den letzteren Ausdruck aber kann man die Bruchpotenz $a^{\frac{np+mq}{nq}}$ setzen, welche gleich $a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ ist.

b) **Potenzen mit negativem Bruchexponenten.** Die Formel:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

führt auf die negative gebrochene Potenz, wenn die Differenz der Bruchexponenten $\frac{m}{n} - \frac{p}{q}$ eine negative Zahl giebt. So ist z. B.:

$$16^{\frac{1}{4}} : 16^{\frac{1}{2}} = 16^{-\frac{1}{4}}; \qquad 8^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}}.$$

Um den Wert für $16^{-\frac{1}{4}}$ zu bestimmen, setzen wir nach den Lehren unter a) statt der Bruchpotenzen $16^{\frac{1}{4}}$ und $16^{\frac{1}{2}}$ die gleichwertigen Wurzeln, dann ist:

$$16^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} : \sqrt{16} = \tfrac{1}{2}.$$

Nach dem Begriffe des Bruches ist $-\frac{1}{4} = (-1) : 4$ und daher nach der Definitionsformel I unter a):

$$16^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^{-1}}.$$

Ersetzen wir den Radikanden 16^{-1} nach der Formel:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

durch eine positive Zahl, so ist:

$$16^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = 1 : \sqrt[4]{16} = \tfrac{1}{2}.$$

Heißt der gebrochene Exponent $-\frac{x}{y}$, so ist allgemein:

$$a^{-\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^{-x}} = \sqrt[y]{\frac{1}{a^x}} = 1 : \sqrt[y]{a^x}.$$

Zu derselben Bedeutung der Potenzform $a^{-\frac{x}{y}}$ gelangt man durch folgende Überlegung. Nach § 62 ist:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Läßt man diese Gleichung auch für alle negativen Brüche des Exponenten gelten und setzt $-n = -\frac{x}{y}$, so erhält man die Definitionsformel:

$$a^{-\frac{x}{y}} = \frac{1}{a^{\frac{x}{y}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{x}{y}} = \frac{1}{\sqrt[y]{a^x}}.$$

In Worten: Jede Potenz mit negativem Bruchexponenten ist gleich dem umgekehrten Wert der Basis potenziert mit positivem Exponenten.

Es ist also z. B.:

$$16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \tfrac{1}{8};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \tfrac{1}{9}.$$

Nach der Definitionsformel einer Potenz mit negativem Bruchexponenten kann auch diese Potenzform als ein Produkt im Sinne des ursprünglichen Potenzbegriffs aufgefaßt werden. Es ist nämlich:

$$a^{-\frac{x}{y}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[y]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[y]{\frac{1}{a}} \cdots \sqrt[y]{\frac{1}{a}} \quad (x \text{ Faktoren}).$$

Für das praktische Rechnen mit negativen Bruchpotenzen merke man noch folgende

Formel: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{x}{y}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{y}}.$

Man kann also den negativen Bruchexponenten stets positiv setzen, wenn man die Grundzahl in den umgekehrten Zahlenwert verwandelt. So ist z. B.:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}.$$

Die für Potenzen mit positiven gebrochenen Exponenten bewiesenen Rechengesetze haben auch für Potenzen mit negativem Bruchexponenten Gültigkeit. Wie die letzten Beispiele zeigen, kann man im praktischen Rechnen durch Anwendung der vorstehenden Formeln negative Exponenten vermeiden.

§ 64. **Wurzeln mit negativen und gebrochenen Exponenten.**

Bisher haben wir nur Wurzeln betrachtet, deren Exponenten ganze natürliche Zahlen sind. (Man sehe den Absatz „Erweiterung des Wurzelbegriffs" S. 119.) Nachdem der Potenzbegriff in § 63 durch die Einführung beliebiger Zahlenwerte der relativen Zahlenreihe (§ 58) für den Potenzexponenten eine Erweiterung erfahren hat, müssen wir nun auch die unter VI (S. 119) gestellte Bedingung, daß der Wurzelexponent eine absolute Zahl bezeichnen solle, fallen lassen. Da nämlich das Radizieren die Umkehrung des Potenzierens ist, wobei der Potenzexponent zum Wurzelexponenten wird, so muß die S. 120 gegebene Definition der Wurzel $\sqrt[n]{p}$ dahin erweitert werden, daß auch der Wurzelexponent n jede beliebige positive und negative ganze oder gebrochene Zahl der erweiterten Zahlenreihe bezeichnen kann. Es ist z. B. $\sqrt[-1]{4} = \frac{1}{4}$, weil $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ nach § 62 den Radikanden 4 giebt; $\sqrt[-3]{27} = \frac{1}{3}$, weil $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$ ist; ferner ist $\sqrt[\frac{2}{3}]{16} = 16^{\frac{3}{2}}$, denn $16^{\frac{3}{2}}$ mit dem Wurzelexponenten $\frac{2}{3}$ potenziert liefert zufolge § 62 Formel V $(16^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 16$; endlich ist $\sqrt[-\frac{3}{4}]{64} = 64^{-\frac{4}{3}}$, weil $(64^{-\frac{4}{3}})^{-\frac{3}{4}} = 64$ liefert.

Nach dem vorhin erweiterten Wurzelbegriff bezeichnet der

Ausdruck $\sqrt[-n]{a}$ diejenige Zahl, deren $(-n)$te Potenz den Radikanden a giebt. Um diese Wurzelform in einen gleichwertigen Ausdruck mit positivem Wurzelexponenten zu verwandeln, kann man verschiedene Wege einschlagen. Ein sehr einfaches Mittel zur Bestimmung des Wertes der Wurzel $\sqrt[-n]{a}$ bietet die in § 63 gegebene Formel:

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}.$$

Zufolge dieser Gleichung ist:

$$\sqrt[-n]{a} = a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man durch folgende Entwickelung:

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[(-n)(-1)]{a^{-1}} \text{ (nach § 26) } = \sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Die Richtigkeit der Definitionsformel:

$$\sqrt[-n]{a} = 1 : \sqrt[n]{a}$$

ergiebt sich auch daraus, daß der Radikand a entsteht, wenn man beide Ausdrücke mit $(-n)$ potenziert. Vorstehende Gleichung spricht folgende Definition aus:

Jede Wurzel mit ganzem negativem Wurzelexponenten ist gleich dem umgekehrten Wert derselben mit absolutem Exponenten.

Dividiert man nach dem Gesetz der Wertbeständigkeit einer Wurzel (§ 26) beide Exponenten des Ausdrucks $\sqrt[3]{8^4}$ durch den Potenzexponenten, so entsteht die neue Wurzelform $\sqrt[\frac{3}{4}]{8}$. Eine Wurzel mit gebrochenem Wurzelexponenten entsteht aus einer Wurzel, deren Radikand eine Potenz ist, wenn man sowohl den Wurzel- als den Potenzexponenten durch letzteren dividiert und diese Division nicht aufgeht. Die Bedeutung dieser Wurzelform fließt aus der Formel III § 26, wenn wir deren Richtigkeit auch für

diesen Fall gelten lassen. Unter dieser Annahme ist:

$$\sqrt[3]{8^4} = \sqrt[\frac{3}{4}]{8}, \quad \text{allgemein} \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}.$$

Die Umkehrung dieser Gleichung liefert die

Definitionsformel: $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Es ist daher:

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{8} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16;$$

$$\sqrt[\frac{2}{3}]{16} = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64.$$

Eine Zahl a durch einen Bruch $\frac{n}{m}$ radizieren heißt, dieselbe durch den Zähler n radizieren und die erhaltene Wurzel $\sqrt[n]{a}$ mit dem Nenner m des Bruches potenzieren.

Läßt man die Formel:

$$\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

auch für den Fall Geltung haben, wenn der Wurzelexponent $-n$ den Bruch $-\frac{x}{y}$ bezeichnet, so ist:

$$\sqrt[-\frac{x}{y}]{a} = \frac{1}{\sqrt[\frac{x}{y}]{a}} = \frac{1}{\sqrt[x]{a^y}}.$$

Zu demselben Resultat gelangt man durch Benutzung der Formel:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

und mit Hilfe der Definitionsformel:

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{a^m},$$

wenn die Wurzelform $\sqrt[-\frac{x}{y}]{a}$ diesen Gleichungen unterworfen wird.

Die in diesem Paragraphen besprochenen Wurzelformen gewähren indes für das praktische Rechnen keinen Vorteil. Sie können auch, wie einzelne Beispiele Seite 172 zeigen, in der Rechnung stets dadurch vermieden werden, daß man das Negative auf den Potenzexponenten überträgt und an Stelle der Wurzel mit gebrochenem Wurzelexponenten die gleichwertige Bruchpotenz setzt. Es ist nämlich stets:

$$\sqrt[-n]{a} = a^{-\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[\frac{x}{y}]{a} = a^{\frac{y}{x}} \quad \text{und} \quad \sqrt[-\frac{x}{y}]{a} = a^{-\frac{y}{x}}.$$

Anmerkung. Die Auffassung der Wurzeln als Bruchpotenzen rührt von Stevin (1585) und Newton (1707) her.

Vierter Abschnitt.

Einiges aus der Zahlentheorie*); Verhältnisse und Proportionen.

§ 65. Maß der Zahlen.**)

1) Begriff des Maßes. Unter „Maß" im weiteren Sinne begreift man jede Größe, welche zum Messen einer mit ihr gleichartigen Größe benutzt wird. Das Messen besteht darin, daß man untersucht, wie oft die als Maß angenommene Größe in der andern enthalten ist, gleichviel ob bei diesem Verfahren ein Rest bleibt oder nicht. Die Zahl, welche das Ergebnis der Messung angiebt, heißt die Maßzahl der gemessenen Größe inbezug auf das Maß.***) Jede Maßzahl ist ihrem Begriffe gemäß eine unbenannte Zahl. Im engeren Sinne nennt man eine Größe das Maß einer andern mit ihr gleich benannten, wenn die Maßzahl eine ganze Zahl ist, mit andern Worten, wenn die zu messende Größe ein ganzes Vielfaches von ihrem Maße ist. Nach § 14 ist das Messen eine besondere Form der Division, die zu messende Größe ist der Dividend und das Maß heißt Divisor. Ist a ein Vielfaches von b, so giebt es stets eine ganze Zahl m, so daß $a = bm$ ist, und der Quotient $a : b$ bezeichnet eine ganze Zahl.

Von den beiden Zahlgrößen 12 und 16 ist die größere kein Vielfaches der kleineren, aber jede von ihnen hat dieselbe

*) Man sehe „Begriff der Arithmetik" S. 2.

**) In diesem und den §§ 66 und 67 soll unter Zahl stets die natürliche Zahl verstanden werden.

***) Im allgemeinsten Sinne kann die Maßzahl eine ganze Zahl, ein gewöhnlicher Bruch, ein zehnteiliger Bruch und eine Irrationalzahl sein.

Zahl, nämlich 4, zum Maße. Wenn zwei oder mehrere Zahlen (überhaupt Größen) sich gemeinschaftlich durch eine andere Zahl (Größe) messen lassen, so heißt letztere das „gemeinschaftliche Maß" jener Größen. Sind die zu messenden Größen Zahlen, so nennt man ihr gemeinschaftliches Maß auch häufig den „gemeinschaftlichen Teiler" derselben. Die Zahlen 24 und 36 haben 2, 3, 4 und 12 zum Maße, 12 ist das größte gemeinschaftliche Maß von 24 und 36.

2) Lehrsätze über das gemeinschaftliche Maß. Die Zahl 6 ist ein Maß der Zahlen 30 und 18; sie ist auch gemeinschaftlicher Teiler der Summe 30 + 18 und der Differenz 30 — 18.

Heißen die Zahlen allgemein A und B und bezeichnet man ihr gemeinsames Maß mit M, so sind nach 1) A und B Vielfache von M. Es sei:

$$A = m \cdot M \quad \text{und} \quad B = n \cdot M, \qquad \text{so ist:}$$

$$A + B = (m + n) \cdot M \quad \text{und} \quad A - B = (m - n) \cdot M,$$

d. h. sowohl die Summe als die Differenz $A \pm B$ ist ein Vielfaches von M. Mithin besteht der

1) **Lehrsatz:** Ist eine Zahl ein Maß von zwei andern Zahlen, so ist sie auch ein Maß von der Summe und von der Differenz beider Zahlen.

Zusätze: Aus diesem Lehrsatze folgt unmittelbar: wenn M ein Maß von A ist, so ist diese Zahl auch ein Maß von:

$$\underbrace{A + A + A + \cdots + A}_{(x)},$$

d. i. von $x \cdot A$; in Worten: a) Jedes Maß einer Zahl ist auch ein Teiler von einem beliebigen Vielfachen derselben. Folgerung: b) Ist ein Produkt Maß einer Zahl, so ist auch jeder Faktor desselben ein Maß dieser Zahl. Es läßt sich leicht zeigen, daß M auch ein Maß von

$$m \cdot A \pm n \cdot B$$

ist, d. h.: c) Das gemeinsame Maß zweier Zahlen ist auch ein Maß von der Summe und der Differenz beliebiger Vielfache dieser Zahlen.

Die Zahl 12 ist das größte Maß der Zahlen des Quotienten 84 : 24. Mißt man 84 durch 24, so ergiebt sich:

$$84 - 3 \cdot 24 = 12$$

als Rest; von diesem ist 12 ebenfalls der größte Teiler. Bezeichnet man die Zahlen des Quotienten mit A und B, ihr gemeinschaftliches Maß mit M und ist:

$$A = q \cdot B + R, \quad \text{mithin} \quad A - q \cdot B = R,$$

so muß nach Lehrsatz 1) M auch ein Teiler von R sein; in Worten:

2) **Lehrsatz:** Jede Zahl, die ein Maß des Dividenden und des Divisors ist, ist auch ein Teiler vom Reste.

Ist umgekehrt M ein Maß des Divisors B und des Restes R und steckt B $q$mal in A, so ist:

$$A = q \cdot B + R.$$

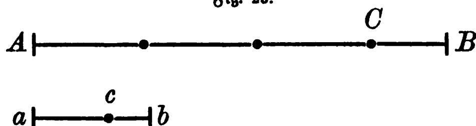
Nach dem 1) Lehrsatze muß M ein Maß von $q \cdot B + R$ oder von A sein. Hieraus folgt:

3) **Lehrsatz:** Jedes gemeinschaftliche Maß von Divisor und Rest ist auch ein Teiler des Dividenden.

4) Aufgabe: Das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 1728 und 6336 zu ermitteln.

Auflösung: Die Zahl 6336 werde durch die Strecke AB und die andere durch die Strecke ab versinnlicht. Man trage die kleinere Strecke auf der größeren so oft als es angeht von

Fig. 23.



A aus ab. Das kann dreimal geschehen, so daß

$$AC = 3 \times ab$$

ist. Den Rest BC trage man auf der Strecke ab ab, was nur einmal ausgeführt werden kann; es ist:

$$ac = 1 \cdot BC.$$

Nun trage man den Rest bc so oft als es ausführbar ist auf BC ab, da dies gerade zweimal geht, so ist:

$$BC = 2 \cdot bc.$$

Darstellung des Verfahrens:

$$\begin{array}{llll} ab \div AB = 3 & & & \\ \quad\;\; \underline{AC} & & & \\ \quad\;\; BC \div ab = 1 & & & \\ \qquad\qquad \underline{ac} & & & \\ \qquad\qquad bc \div BC = 2. & & & \end{array}$$

Das Verfahren mit Zahlen ist genau dasselbe.

$$\begin{array}{l} 1728 \div 6336 = 3 \\ \qquad\quad \underline{5184} \\ \qquad\quad 1152 \div 1728 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\;\; \underline{1152} \\ \qquad\qquad\qquad\;\;\; 576 \div 1152 = 2. \end{array}$$

Regel: Um das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden, dividiere man die kleinere Zahl B in die größere A. Geht die Division (Messung) auf, so ist B selbst das größte Maß von A. Im allgemeinen wird jedoch ein Rest R_1 bleiben. Diesen dividiere man in den vorhergehenden Divisor B und setze dieses Verfahren so lange fort, bis ein Rest entsteht, der gleich Null ist. Der letzte Divisor ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß.

Beweis. Die Begründung der Richtigkeit des Verfahrens hat 1) zu zeigen, daß der letzte Divisor $\overline{bc} = 576$ ein Maß der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{ab}$, bezw. der Zahlen 6336 und 1728 ist; 2) ist der Nachweis zu führen, daß $\overline{bc} = 576$ das größte Maß dieser Strecken bezw. der von ihnen versinnlichten Zahlen ist.

Aus den durch das Berechnungs-Schema angezeigten Divisionen (Messungen) ergeben sich folgende Gleichungen:

1) $AB = 3 \cdot ab + BC$.	1) $6336 = 3 \cdot 1728 + 1152$.
2) $ab = 1 \cdot BC + bc$.	2) $1728 = 1 \cdot 1152 + 576$.
3) $BC = 2 \cdot bc$.	3) $1152 = 2 . 576$.

Zufolge der Gleichungen unter 3) ist $bc = 576$ ein Maß von $BC = 1152$, und daher nach dem 1) Lehrsatz auch ein Maß von $BC + bc$ oder von ab, bezw. von $1152 + 576$, d. i. von 1728. Aus demselben Grunde ist $bc = 576$ auch ein Maß von: $3ab + BC = 3 \cdot 1728 + 1152$, also von $AB = 6336$.

Die zweite Behauptung, daß $bc = 576$ das größte Maß von AB und ab ist, beweise man indirekt. Gesetzt, diese Strecken hätten ein größeres gemeinschaftliches Maß als bc, etwa die Strecke pq (die Zahl $576 + n$), so müßte dieses auch nach dem 2) Lehrsatze ein Maß vom ersten Reste BC (der Zahl 576) sein. Zufolge desselben Lehrsatzes müßte pq $(576 + n)$ auch ein Teiler des zweiten Restes, nämlich von bc (576) sein. Das ist aber nicht möglich, weil eine größere Strecke nie das Maß einer kleineren, bezw. $576 + n$ kein Teiler von 576 sein kann. Mithin ist bc wirklich das größte Maß von den Strecken AB und bc, bezw. 576 der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen 6336 und 1728.

Das gemeinschaftliche Maß bildet einen Gesichtspunkt zur Einteilung der natürlichen Zahlen. Ergiebt sich durch obiges Verfahren als letzter Divisor die Zahl 1, so ist diese das größte gemeinschaftliche Maß der gegebenen Zahlen.

Zwei oder mehrere Zahlen, die außer 1 kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen in Beziehung zu einander relative Primzahlen, Primzahlen unter sich, z. B. 9 und 17, 16 und 25. Man bezeichnet Zahlen von dieser Eigenschaft durch $9 \smile 17$. Alle Zahlen, die sich nur durch 1 und sich selbst messen lassen, nennt man absolute Primzahlen, Primzahlen an und für sich, z. B. 1, 2, 3, 5, 7 u. s. w.

Von den absoluten Primzahlen 2 und 3 ist jede ein Teiler von 24; ihr Produkt $2 \cdot 3 = 6$ ist ebenfalls ein Maß von 24. Jede der relativen Primzahlen 5 und 7 ist ein Maß von 70; das Produkt $5 \cdot 7 = 35$ geht auch in 70 auf. Hieraus folgern wir den

5) **Lehrsatz:** Wenn zwei (absolute oder relative) Primzahlen a und b einzeln in einer dritten Zahl c aufgehen, so ist auch ihr Produkt ab ein Teiler von c.

Beweis. Es sei $c:a = m$ und $c:b = n$, also $c = am$ und $c = bn$, so ist $am = bn$. Hieraus folgt:

$$n = am : b = a \cdot \frac{m}{b}.$$

Da nun n eine ganze Zahl ist und a und b Primzahlen sind, so muß in dem Ausdruck $a \cdot \frac{m}{b}$ der Quotient $m : b$ ebenfalls eine ganze Zahl bezeichnen. Es sei nun $m : b = x$, also $m = bx$, so ist, da $c = am$, auch $c = abx$; mithin $c : ab = x$, d. h. c ist durch das Produkt der Primzahlen teilbar, mit anderen Worten: ab ist ein Maß von c.

Im Gegensatz zu den absoluten Primzahlen heißen alle übrigen Zahlen zusammengesetzte Zahlen, weil sie sich in Produkte zerlegen lassen, deren Faktoren Primzahlen sind, z. B. 4, 9, 12 u. s. w. Eine zusammengesetzte Zahl wird in ein Produkt aus Primzahlen zerlegt, indem man sie durch die kleinste Primzahl, welche in ihr aufgeht, dividiert und die Division durch Primzahlen so lange fortsetzt, bis der letzte Quotient selbst eine Primzahl ist.

Die Zerlegung in Primfaktoren bietet ein zweites Mittel, das größte gemeinschaftliche Maß von zwei oder mehreren Zahlen zu finden. Das Produkt der gemeinschaftlichen Faktoren, welche die Zerlegungen enthalten, giebt den größten Teiler der Zahlen. Es sei durch dieses Verfahren der größte Teiler von 6336 und 1728 zu suchen.

Darstellung des Verfahrens:

	6336
2	3168
2	1584
2	792
2	396
2	198
2	99
3	33
3	11
11	1

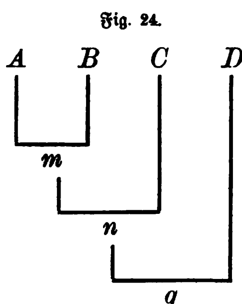
	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
2	27
3	9
3	3
3	1

Es ist also $6336 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11$. $1728 = 2^6 \cdot 3^3$.

Da in beiden Zerlegungen das Produkt $2^6 \cdot 3^2$ vorkommt, so ist $2^6 \cdot 3^2 = 576$ das größte Maß der Zahlen 6336 und 1728.

Um das größte gemeinschaftliche Maß von mehreren Zahlen, A, B, C, D u. s. w., nach der ersten Methode zu finden, suche man zunächst den größten gemeinsamen Teiler von A und B, er heiße m; dann berechnet man wie vorhin das größte gemeinsame Maß der Zahlen m und C, u. s. f. Der zuletzt gefundene Teiler q ist das größte Maß der gegebenen Zahlen A, B, C und D. — Das zweite Verfahren gilt unmittelbar für eine beliebige Anzahl von Zahlen. Auf diese Weise findet man z. B. als größten gemeinschaftlichen Teiler t der Zahlen 4061, 4619 und 4867 für t den Wert 31. Dividiert man diese Zahlen durch ihr größtes Maß, so sind die Quotienten 131, 149 und 157 relative Primzahlen.

Fig. 24.



Den größten gemeinschaftlichen Teiler zu algebraischen Summen findet man durch dasselbe Verfahren, welches für numerische Zahlen angegeben worden ist. Es sei z. B. das größte Maß von den Summen:

$$8x^2 + 6x + 1 \quad \text{und} \quad 16x^2 + 14x + 3$$

zu berechnen.

$$\begin{array}{l} 8x^2+6x+1 \div 16x^2+14x+3=2 \\ \qquad\qquad\quad \underline{16x^2+12x+2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2x+1 \div 8x^2+6x+1=4x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{8x^2+4x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2x+1 \div 2x+1=1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{2x+1} \end{array}$$

Das gemeinschaftliche Maß ist $2x + 1$. Um Brüche zu vermeiden, empfiehlt es sich manchmal, vor Ausführung einer Division den Divisor oder Dividenden mit einer Zahl zu multiplizieren oder zu dividieren. Durch diese Veränderung

darf indes kein gemeinsamer Faktor im Divisor und seinem Dividenden entstehen.

Das Suchen des gemeinschaftlichen Teilers wird mit Vorteil angewendet zum Kürzen von Quotienten und Brüchen (§ 48, b). So ist z. B. der Quotient aus obigen algebraischen Summen:

$$\frac{8x^2 + 6x + 1}{16x^2 + 14x + 3} = \frac{(4x + 1) \cdot (2x + 1)}{(8x + 3) \cdot (2x + 1)} = \frac{4x + 1}{8x + 3}.$$

Den Quotienten:

$$\frac{2x^3 + 9x^2 + 10x + 3}{4x^3 + 16x^2 + 17x + 5}$$

auf den kürzesten Ausdruck zu bringen.

Auflösung: Man suche wie vorhin den größten gemeinschaftlichen Teiler des Divisors und des Dividenden. Bezeichnet man denselben mit t, so ergiebt sich:

$$t = -2x^2 - 3x - 1.$$

Es ist:

$$\frac{2x^3 + 9x^2 + 10x + 3}{4x^3 + 16x^2 + 17x + 5} = \frac{(-x - 3) \cdot (-2x^2 - 3x - 1)}{(-2x - 5) \cdot (-2x^2 - 3x - 1)} = \frac{x + 3}{2x + 5}.$$

§ 66. Vom kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (Dividenden).

Begriff. Man versteht unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (Dividenden, Dividuus) zweier oder mehrerer Zahlen a, b, c die kleinste Zahl, in welche sämtliche gegebene Zahlen ohne Rest dividiert werden können. So ist z. B. der kleinste Dividend von 24 und 60 die Zahl 120. In der Bruch-(Quotienten-)Rechnung führt das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner (Divisoren) den Namen Hauptnenner (Hauptdivisor). (Man vergleiche § 48, a und § 54.)

Der kleinste Dividend von 24 und 60 ist 120; dieses kleinste Vielfache ist offenbar ein Teiler von:

$$2 \cdot 120, \quad 3 \cdot 120 \cdots\cdot n \cdot 120.$$

Bezeichnen wir das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen

a, b, c mit v, so ist v ein Teiler von $2 \cdot v$, $3 \cdot v \cdots \cdot n \cdot v$; d. h.:

1) **Lehrsatz:** Der kleinste Dividend von zwei oder mehreren Zahlen ist stets ein Teiler von beliebigen andern Vielfachen dieser Zahlen.

Die Zahlen 24, 60 und 90 haben 720 zum gemeinsamen Dividenden; die einzelnen Quotienten aus 720 und diesen Zahlen, nämlich 30, 12 und 8 haben das gemeinsame Maß 2. Der Quotient 720 : 2, also die Zahl 360, ist ebenfalls ein gemeinsames Vielfaches von 24, 60 und 90. Dieses Beispiel zeigt:

2) **Lehrsatz:** Haben die Zahlen a, b, c das gemeinschaftliche Vielfache v und die Quotienten $v:a$, $v:b$ und $v:c$ ein gemeinschaftliches Maß m, so ist auch $v:m$ ein gemeinschaftlicher Dividend der Zahlen a, b und c.

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 24 und 60 heißt 120; die Quotienten 120 : 24 und 120 : 60, also die Zahlen 5 und 2 sind relativ prim. Hieraus ergiebt sich:

3) **Lehrsatz:** Ist die Zahl D der kleinste Dividend von a, b und c, so bezeichnen die Quotienten aus D und den gegebenen Zahlen, also $D:a$, $D:b$ und $D:c$ relative Primzahlen.

Beweis. Gesetzt, die Quotienten $D:a$, $D:b$ und $D:c$ hätten einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Teiler t, so müßte vermöge des vorigen Lehrsatzes der Quotient $D:t$ ebenfalls ein gemeinsamer Dividend der Zahlen a, b und c sein. Mithin wäre $D:t$ ein kleineres Vielfaches, was gegen die Voraussetzung streitet, daß D den kleinsten Dividenden von a, b und c bezeichnen soll.

4) **Lehrsatz:** Wenn die Quotienten $D:a$, $D:b$ und $D:c$ relative Primzahlen bezeichnen, so ist D der kleinste gemeinsame Dividend von a, b und c. (Umkehrung vom 3) Lehrsatz.)

Beweis. Gesetzt, nicht D sei der kleinste gemeinschaftliche Dividend der Zahlen a, b und c, sondern eine andere Zahl,

etwa M, so müßte nach dem 1) Lehrsatze D ein ganzes Vielfaches von M, also etwa:

$$1)\quad D = M \cdot t$$

sein. Nach dem Begriffe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen müßten ferner folgende Gleichungen bestehen, wenn m, n und p die Werte der Quotienten aus M und den gegebenen Zahlen bezeichnen:

$$2)\quad M:a = m, \qquad M:b = n, \qquad M:c = p.$$

Vermöge der ersten Gleichung müßte:

$$3)\quad D:a = mt, \qquad D:b = nt, \qquad D:c = pt$$

sein, d. h., die Quotienten aus dem kleinsten Dividenden D und den Zahlen a, b, c hätten den gemeinsamen Teiler t. Dies widerspricht der Voraussetzung, welche die Bedingung enthält, daß diese Quotienten relative Primzahlen sein sollen.

Zusatz. Der 4) Lehrsatz bietet ein Mittel, die Richtigkeit eines durch Rechnung gefundenen kleinsten Dividenden gegebener Zahlen nachzuweisen. (Siehe unter 6.)

Dividiert man nach § 13, 5 das Produkt $60 \cdot 24$ durch den größten Teiler der Faktoren, also durch 12, so erhält man:

$$\frac{60 \cdot 24}{12} = 5 \cdot 24 = 120,$$

also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 24 und 60. Dieses Beispiel zeigt:

5) **Lehrsatz:** Man erhält den kleinsten gemeinschaftlichen Dividenden zweier Zahlen, indem man den Quotienten aus einer der Zahlen und dem größten Teiler beider Zahlen mit der andern Zahl multipliziert.

Beweis. Es sei t der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen m und n, so ist zu zeigen, daß $\frac{m}{t} \cdot n$ oder $m \cdot \frac{n}{t}$ das kleinste gemeinsame Vielfache von m und n giebt. Das Produkt mn ist offenbar ein gemeinsamer Dividend der Zahlen m und n. Da nun $m = \frac{mn}{n}$ und $n = \frac{mn}{m}$, so muß t auch

das größte gemeinschaftliche Maß der Quotienten $\frac{mn}{n}$ und $\frac{mn}{m}$ sein. Weil ferner nach der Voraussetzung t der größte gemeinsame Teiler von m und n ist, so bezeichnen zufolge Lehrsatz 3) $m:t$ und $n:t$ relative Primzahlen. Die diesen Quotienten gleichen Ausdrücke $\frac{mn:t}{n}$ und $\frac{mn:t}{m}$ bezeichnen also gleichfalls relative Primzahlen, und da sowohl m als n in $m \cdot n:t$ ohne Rest enthalten ist, so muß $m \cdot n:t$ oder $\frac{m}{t} \cdot n$ oder $m \cdot \frac{n}{t}$ den kleinsten gemeinschaftlichen Dividenden der Zahlen m und n liefern.

6) **Lehrsatz:** Man findet den kleinsten gemeinschaftlichen Dividenden von drei und mehreren Zahlen, indem man das unter 5) angegebene Verfahren zuerst auf zwei Zahlen a und b anwendet — der gesuchte Dividend heiße D — hierauf für D und die dritte Zahl c das gemeinsame Vielfache ermittelt, u. s. w. Die zuletzt gefundene Zahl ist der kleinste gemeinschaftliche Dividend aller gegebenen Zahlen.

Es sei z. B. das kleinste gemeinsame Vielfache von 72, 120 und 540 zu suchen.

Da 24 das größte gemeinschaftliche Maß von 72 und 120 ist, so beträgt ihr kleinster gemeinschaftlicher Dividuus $\frac{72}{24} \cdot 120 = 360$. Diese Zahl und 540 haben 180 zum größten gemeinsamen Teiler; mithin ist ihr kleinstes Vielfaches $\frac{360}{180} \cdot 540 = 1080$. Der letzte Dividend 1080 ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 72, 120 und 540; denn nach Lehrsatz 4) sind die Quotienten aus 1080 und den einzelnen gegebenen Zahlen, nämlich 15, 9 und 2, relative Primzahlen.

7) Zur Berechnung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen bedient man sich auch der folgenden

Regel: Man zerlege sämtliche gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren und schreibe die in einem Produkt wiederholt vorkommenden Faktoren in Potenzform. Dann ist das Produkt aus den höchsten Potenzen aller

verschiedenen Faktoren der kleinste gemeinsame Dividuus aller gegebenen Zahlen.

Es sei z. B. nach dieser Regel das kleinste gemeinsame Vielfache von 8, 12, 16, 24, 32, 36 und 256 zu suchen.

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3.$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3.$$
$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4.$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3.$$
$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5.$$
$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2.$$
$$256 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8.$$

Kleinster gemeinsamer Dividend: $2^8 \cdot 3^2 = 256 \cdot 9 = 2304.$

Die praktische Ausrechnung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen geschieht gewöhnlich in folgender Darstellung:
Gegeben: 9, 12, 16, 21, 24, 54, 60, 84.

Berechnung:								
	~~9~~,	~~12~~,	16,	~~21~~,	24,	54,	60,	84.
2			8,		12,	27,	30,	42.
2			4,		6,	27,	15,	21.
2			2,		~~3~~,	27,	15,	21.
3			2,			9,	5,	7.
3			2,			3,	5,	7.

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 15120.$$

Man verfährt hierbei nach folgenden

Regeln: a) Beim Bilden des kleinsten gemeinsamen Dividuus darf man alle Zahlen in einer Zeile, die in einer andern aufgehen, streichen. So sind z. B. in der ersten Zeile die Zahlen 9, 12 und 21 durchstrichen, weil sie bezüglich Teiler von 54, 24 und 84 sind.

b) Haben einige oder alle Zahlen einen gemeinschaftlichen Teiler, so dividiert man dieselben durch letzteren und multipliziert (zuletzt) statt jener Zahlen

die erhaltenen Quotienten mit dem gemeinsamen Teiler.

c) Man setze die Zerlegung der Zahlen so lange als möglich fort und scheide hierbei nur absolute **Primzahlen** aus.

Anwendung des Vorhergehenden. Die vorstehenden Lehren finden auch auf algebraische Ausdrücke Anwendung. Wenn eine algebraische Summe sich in Faktoren zerlegen läßt, die sich weiter nicht zerfällen lassen, so kann man diese Faktoren beziehlich als einfache Ausdrücke bezeichnen. Dieser Erklärung gemäß sind also die Faktoren der algebraischen Summe:

$$x^2 - 3x - 6,$$

nämlich $x + 2$ und $x - 3$ mit Beziehung auf ihr Produkt, bezw. die entsprechende Summe, einfache Faktoren, obgleich sie an und für sich zusammengesetzte Ausdrücke sind. Der kleinste gemeinsame Dividuus zu algebraischen Summen wird nach denselben Methoden berechnet, welche vorhin für numerische Zahlen angegeben worden sind. So ist z. B. das kleinste gemeinsame Vielfache der Summen:

$$x^2 + 7x + 10 \quad \text{und} \quad x^2 - 6x - 16$$

nach dem 5) Lehrsatze:

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} \times (x^2 - 6x - 16) = (x + 5) \cdot (x^2 - 6x - 16).$$

Nach der Methode mittels Zerlegung ist:

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2) \cdot (x + 5).$$
$$x^2 - 6x - 16 = (x + 2) \cdot (x - 8).$$

Kleinster Dividuus: $(x + 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 8)$.

(Vergleiche § 48, a.)

Das Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus findet Anwendung bei der Vereinigung ungleichnamiger Quotienten und Brüche, um den kleinsten Hauptdivisor oder Hauptnenner zu berechnen.

§ 67. Teilbarkeit der Zahlen.

1) Unter Teilbarkeit der Zahlen versteht man die Gesetze, welche aussprechen, unter welchen Bedingungen Zahlen durch eine andere teilbar sind, also eine Division $a : b$ ohne Rest aufgeht. Vermöge des § 66 ist es klar, daß eine Zahl N, welche ein gemeinsames Vielfaches von $a, b, c \cdots$ ist, durch diese Zahlen teilbar ist.

2) Die Beweise für die Lehrsätze über die Teilbarkeit numerischer Zahlen beruhen auf dem dekadischen Zahlensystem. Alle dekadischen Zahlen lassen sich durch eine Summe darstellen, deren einzelne Summanden Produkte aus Potenzen der Grundzahl 10 und den Ziffern (Einleitung 6) sind. Da letztere angeben, wie viel Einheiten von einer Ordnung (Einleitung 7) vorhanden sind, so kann man sie in einer numerischen Zahl passend mit dem Namen „Ordnungskoeffizienten" bezeichnen. Nach dem dekadischen Zahlengesetz ist:

$$79584 = 7 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

Bezeichnen wir die „Ordnungskoeffizienten" mit den allgemeinen Zeichen $a, b, c, d, e \cdots$ und die dekadische Zahl mit N, so ist die allgemeine Form einer Zahl des dekadischen Systems:

$$N = \cdots \cdot e \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + a.$$

Die Summe der Ziffern einer Zahl ohne Rücksicht auf den Rang oder Stellenwert der Zahlzeichen, also die Summe der Ordnungskoeffizienten nennt man Quersumme der Zahl. So ist z. B. die Quersumme von:

$$79584 = 7 + 9 + 5 + 8 + 4 = 33.$$

Die Zahlen:

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8 \cdots\cdot$$

können auch durch folgende Produkte dargestellt werden:

$$2 \cdot 1, \quad 2 \cdot 2, \quad 2 \cdot 3, \quad 2 \cdot 4 \cdots\cdot 2 \cdot n.$$

Alle Zahlen, welche durch das Zeichen $2 \cdot n$ (unter n eine beliebige natürliche Zahl verstanden) ausgedrückt werden können,

heißen gerade Zahlen. Der Ausdruck $2 \cdot n$ ist die allgemeine Form derselben. Es ist:

$$a)\ \begin{cases} 1 = 2 \cdot 0 + 1; & 3 = 2 \cdot 1 + 1; \\ 5 = 2 \cdot 2 + 1; & 7 = 2 \cdot 3 + 1 \quad \text{u. s. f.} \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 1 = 2 \cdot 1 - 1; & 3 = 2 \cdot 2 - 1; \\ 5 = 2 \cdot 3 - 1; & 7 = 2 \cdot 4 - 1 \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Jede Zahl, welche die Form $2n \pm 1$ hat, heißt ungerade.

3) Kennzeichen der Teilbarkeit.

a) Teilbarkeit durch 2 und 5. Da alle geraden Zahlen die Form $2 \cdot n$ haben, so ist es klar, daß dieselben sämtlich durch 2 teilbar sind. Aus diesem Grunde werden die geraden Zahlen häufig als solche definiert, welche sich durch 2 ohne Rest teilen lassen. Hingegen erklärt man die ungeraden als solche, die durch 2 dividiert 1 als Rest geben. Mit Benutzung obiger allgemeinen Form einer dekadischen Zahl wird das Gesetz über die Teilbarkeit durch 2 und 5 in folgender Weise entwickelt. Da alle Summanden von N mit Ausnahme von a den Faktor 10 haben und die Zahlen 2 und 5 Teiler von 10 sind, so müssen letztere auch in allen Ordnungseinheiten und beliebigen Vielfachen derselben aufgehen (§ 65, 1, Zusatz a). Offenbar wird die ganze Zahl N durch 2 oder 5 teilbar sein, wenn die Einer a eine durch 2 oder 5 teilbare Zahl bezeichnen. Beim Teiler 2 muß also a eine der Zahlen 2, 4, 6, 8 oder Null, beim Divisor 5 entweder 0 oder 5 sein. Hieraus ergiebt sich der

1) **Lehrsatz:** Eine Zahl ist durch 2 oder 5 teilbar, wenn die Einer durch 2 oder 5 teilbar sind.

b) Teilbarkeit durch 4 oder 25. Alle Summanden der numerischen Zahl N mit Ausschluß der beiden $b \cdot 10$ und a sind stets durch 4 und 25 teilbar, weil jeder derselben den Faktor 100 enthält, in welchem beide Divisoren aufgehen. Es kommt also darauf an, daß die Summe $b \cdot 10 + a$ eine durch 4 oder 25 teilbare dekadische Zahl darstellt, wenn die Division

der ganzen Summe den Rest Null liefern soll. Wir haben also den

2) **Lehrsatz:** Eine dekadische Zahl ist durch 4 oder 25 teilbar, wenn die Zehner und Einer eine durch 4 oder 25 teilbare Zahl bezeichnen.

c) Teilbarkeit durch 8 oder 125. Sieht man von den Summanden, welche die drei niedrigsten Zahlordnungen von N bezeichnen, ab, so sind alle Summanden von N sowohl durch 8 als durch 125 teilbar, weil sie 1000 zum Faktor haben, das ein gemeinsames Vielfaches von beiden Teilern ist. Das Kennzeichen für die Teilbarkeit der ganzen Summe ist also in dem Ausdruck $c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$ zu suchen. Stellt letzterer eine durch 8 bezw. 125 teilbare Zahl dar, so kann man die ganze Summe durch diese Zahlen dividieren. Mithin besteht der

3) **Lehrsatz:** Eine numerische Zahl ist durch 8 oder 125 teilbar, wenn die niedrigste dreizifferige Klasse durch diese Zahlen teilbar ist.

d) Teilbarkeit durch 9 und 3. Es ist:

$$10^1 = 9 + 1; \qquad 10^2 = 99 + 1; \qquad 10^3 = 999 + 1;$$

allgemein:

$$10^n = 9999 \cdots\cdots + 1.$$

Hieraus folgt: Die Grundzahl 10 des dekadischen Systems und ihre Potenzen, 10^n, liefern bei der Division durch 9 den Rest 1. Dividiert man die Zahlen:

$$20 = 2 \cdot 10, \qquad 200 = 2 \cdot 10^2, \qquad 2000 = 2 \cdot 10^3 \text{ u. s. w.}$$

durch 9, so entsteht stets 2 als Rest. Die Divisionen der Zahlen:

$$30 = 3 \cdot 10, \qquad 300 = 3 \cdot 10^2, \qquad 3000 = 3 \cdot 10^3 \text{ u. s. f.}$$

lassen stets den Rest 3 übrig. Bezeichnen z und n beliebige natürliche Zahlen, so ergiebt sich durch die Division aller Zahlen von der Form $z \cdot 10^n$ durch 9 derselbe Rest, der durch Teilen von z durch 9 entsteht. Dividiert man also jeden Summanden der Zahl:

$$N = \cdots\cdots e \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + a$$

durch 9, so erhält man die Restsumme:

$$a + b + c + d + e \cdots\cdot,$$

d. i. die **Quersumme** von N.

Aus vorstehenden Entwickelungen folgt der

4) **Lehrsatz: Jede Zahl liefert bei der Division durch 9 denselben Rest, den das Teilen ihrer Quersumme durch 9 ergiebt, oder was dasselbe ist: Jede Zahl ist ein Vielfaches von 9 nebst dem Reste, der durch Division ihrer Quersumme durch 9 übrig bleibt.**

Es ist nun klar, daß der letzte Rest bei Division einer dekadischen Zahl durch 9 gleich Null ist, wenn ihre Quersumme:

$$a + b + c + d + e \cdots\cdot$$

eine durch 9 teilbare Zahl bezeichnet. Da nun die Zahl 3 ein Faktor von 9 ist, so muß jede durch 9 teilbare Zahl sich auch durch 3 ohne Rest teilen lassen (§ 65, 1) Lehrsatz, Zusatz b). Mithin gilt für die Teilbarkeit einer Zahl durch 9 und 3 der

5) **Lehrsatz: Eine Zahl ist sowohl durch 3 als durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch diese Zahlen teilbar ist.**

e) **Teilbarkeit durch 11.** Um ein Kennzeichen für die Teilbarkeit einer Zahl durch 11 zu finden, zerlegen wir die Summanden der Zahl N auf eine solche Weise, daß eine möglichst große Anzahl derselben den Teiler 11 erhält. Das Merkmal für die Teilbarkeit von N liegt alsdann in der Summe der übrigen Summanden. Die Zahl N habe eine gerade Anzahl von Summanden, es sei etwa:

$$N = d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + a.$$

Es ist: $b \cdot 10 = b(11 - 1)$; $c \cdot 10^2 = c(99 + 1)$;

$$d \cdot 10^3 = d(1001 - 1).$$

Setzen wir die Werte auf der rechten Seite dieser Gleichungen in N, so entsteht:

$$N = (d \cdot 1001 + c \cdot 99 + b \cdot 11) + [a + c - (b + d)]$$

Da 11 ein Faktor aller Summanden des ersten zusammengesetzten Gliedes ist, so ist dieses durch 11 teilbar. Soll die ganze Summe den Teiler 11 haben, muß das zweite Glied $(a + c) - (b + d)$ auch durch 11 teilbar sein. Da der Ausdruck $a + c$ die Summe der an ungerader Stelle stehenden Ziffern, dagegen $b + d$ die Ziffernsumme der geraden Stellen von N bezeichnet, so besteht der

6) **Lehrsatz:** Eine dekadische Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz aus den Quersummen der ungeraden Stellen und der geraden Stellen den Teiler 11 hat. So ist z. B. die Zahl 465738 durch 11 teilbar; es ist nämlich:

$$8 + 7 + 6 - (3 + 5 + 4) = 11.$$

Bei der Zahl 448360 hat man:

$$0 + 3 + 4 - (6 + 8 + 4) = -11,$$

dieselbe ist also durch 11 teilbar.

7) **Zusatz.** Aus § 65, Lehrsatz 5 folgt unmittelbar: Eine Zahl ist durch 6, 12 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als durch 2, bezw. durch 4 und 3 teilbar ist; durch 15, wenn sie die Teiler 3 und 5, durch 18, wenn sie die Teiler 2 und 9 hat.

§ 68. Zahlenkongruenzen.

1) Begriff der Zahlenkongruenz. Jede positive und negative ganze Zahl A der relativen Zahlenreihe (§§ 31. 32) kann durch ein ganzes Vielfaches $\pm k$ einer absoluten Zahl m vermehrt um eine Zahl r der Reihe $0, 1, 2, 3 \cdots m - 1$ dargestellt werden, z. B.:

$$5 = 1 \cdot 5 + 0 \qquad 45 = 7 \cdot 6 + 3$$
$$10 = 2 \cdot 5 + 0 \qquad 57 = 9 \cdot 6 + 3$$

$$31 = 13 \cdot 2 + 5 \qquad -40 = -14 \cdot 3 + 2$$
$$-29 = -17 \cdot 2 + 5 \qquad -43 = -15 \cdot 3 + 2.$$

Allgemein kann eine Zahl $\pm A$ unter der Form $k \cdot m + r$ ausgedrückt werden. Tritt zu A eine zweite Zahl B, welche

die Eigenschaft $k' \cdot m + r$ erfüllt, so nennt man die Zahlen A und B inbezug auf den sogenannten **Modul** m kongruent. In vorstehenden Beispielen sind je zwei untereinander stehende Zahlen kongruent. So ist z. B. das Zahlenpaar 45 und 57 kongruent inbezug auf 6. In der Bezeichnung der Zahl A durch den Ausdruck $k \cdot m + r$ heißt m wie gesagt der Modul*) und r der **Rest** von A inbezug auf den Modul m. Das Zeichen der Kongruenz ist $\equiv$, statt Modul schreibt man kurz mod. Die Kongruenz von 45 und 57 wird „$45 \equiv 47$ (mod. 6)" allgemein der Zahlen A und B durch „$A \equiv B$ (mod. m)" bezeichnet.

Alle mit A bezüglich des Moduls m kongruenten Zahlen haben die Form $A + km$, in Zeichen:

$$A \equiv A + km .$$

Umgekehrt: Hat eine Zahl B mit Beziehung auf eine gegebene Zahl A die Form $A + km$, so besteht zwischen beiden Zahlen Kongruenz. Für die Kongruenz $A \equiv B$ (mod. m) findet alsdann die Gleichung statt:

$$B = A + km .$$

Umgekehrt schließt man aus dieser Gleichung auf die Kongruenz $A \equiv B$ (mod. m). Wenn z. B. die Gleichung:

$$63 = 39 + 2 \cdot 12$$

vorliegt, so ist:

$$63 \equiv 39 \text{ (mod. 12)} .$$

In der That ist:

$$63 = 5 \cdot 12 + 3 \quad \text{und} \quad 39 = 3 \cdot 12 + 3 ,$$

d. h. die Kongruenz ist vorhanden. Die Zahlen:

$$45 = 7 \cdot 6 + 3 \quad \text{und} \quad 58 = 9 \cdot 6 + 4$$

sind nicht kongruent (inkongruent), weil die Werte für r verschieden sind. Besteht zwischen zwei Zahlen die Beziehung der Nichtkongruenz, so hat die eine Zahl B den Wert $k'm + r'$.

Erklärung: Zwei ganze Zahlen A und B heißen

---

*) Derselbe ist also stets eine natürliche Zahl, ebenso r.

kongruent, wenn sie inbezug auf den Modul m denselben Rest r haben.

Aus den Gleichungen:

$$45 = 7 \cdot 6 + 3 \quad \text{und} \quad 57 = 9 \cdot 6 + 3$$

folgt:

$$\frac{45}{6} = 7 \text{ Rest } 3 \quad \text{und} \quad \frac{57}{6} = 9 \text{ Rest } 3.$$

Allgemein ergiebt sich aus:

$$A = km + r \quad \text{und} \quad B = k'm + r$$

$$\frac{A}{m} = k + r \quad \text{und} \quad \frac{B}{m} = k' + r.$$

Man kann daher die Kongruenz statt wie vorhin auch in folgender Weise erklären: **Zwei Zahlen A und B heißen bezüglich einer dritten Zahl m kongruent, wenn dieselben, durch m dividiert, denselben Rest r übrig lassen.**

2) **Lehrsätze über Zahlenkongruenzen.** a) Wenn man die für die Kongruenz $A \equiv B \pmod{m}$ bestehenden Gleichungen:

$$A = km + r \quad \text{und} \quad B = k'm + r$$

subtrahiert, so entsteht:

$$A - B = (k - k')m; \quad \text{mithin} \quad (A - B) : m = k - k',$$

in Worten:

1) **Lehrsatz: Die Differenz zweier kongruenten Zahlen ist stets durch den Modul derselben teilbar.***)

Umgekehrt schließt man:

2) **Lehrsatz: Ist die Differenz zweier Zahlen A und B durch m teilbar, so sind dieselben hinsichtlich m kongruent.**

Hat der Modul m der Kongruenz A und B die Teiler t und x, so daß also $m = tx$ ist, und setzt man in die obigen aus dem Begriffe der Kongruenz folgenden Gleichungen tx an Stelle von m, so entsteht:

$$A = k \cdot t \cdot x + r \quad \text{und} \quad B = k' \cdot t \cdot x + r, \quad \text{d. h.}$$

*) Man stellt diesen Satz auch als Definition auf.

3) **Lehrsatz:** Die Zahlen A und B sind auch für jeden Teiler des Moduls m kongruent.

b) Aus den Kongruenzen:

$$57 \equiv 45 \ (\text{mod.}\ 6) \quad \text{und} \quad 35 \equiv 29 \ (\text{mod.}\ 6)$$

ergeben sich nach der Formel $A \equiv A + km$ (unter 1) die Gleichungen:

$$57 = 45 + 2 \cdot 6$$
$$35 = 29 + 1 \cdot 6$$

Durch Addition und Subtraktion derselben erhält man:

$$57 \pm 35 = 45 \pm 29 + (2 \pm 1) 6 .\text{*)}$$

Nun ist:

$$92 = 15 \cdot 6 + 2 \quad \text{und} \quad 74 = 6 \cdot 12 + 2,$$

mithin sind die Zahlen 92 und 74 nach dem Modul 6 kongruent. Ferner ist:

$$57 - 35 = 22 = 3 \cdot 6 + 4 \quad \text{und} \quad 45 - 29 = 16 = 2 \cdot 6 + 4,$$

d. h. die Zahlen 22 und 16 sind kongruent inbezug auf denselben Modul. Mit Bezeichnung der Entwickelung ist also:

$$57 \pm 35 \equiv 45 \pm 29 \ (\text{mod.}\ 6).$$

Sind allgemein die Kongruenzen A und B, C und D nach demselben Modul m gegeben, so heißt das Ergebnis vorstehender Entwickelung:

$$A \pm C = (B \pm D) + (k + k')m$$

und daher ist nach dem unter 1) Gesagten:

$$A \pm C \equiv (B \pm D) \ (\text{mod.}\ m).$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man durch folgende Überlegung: Zufolge des 1) Lehrsatzes ist der Modul m ein Teiler sowohl von $A - B$ als auch von $C - D$. Dann muß m auch ein gemeinschaftlicher Teiler von $(A - B) \pm (C - D)$ sein (nach § 65, 1) Lehrsatz). Nun ist aber:

$$(A - B) \pm (C - D) = A \pm C - (B \pm D),$$

*) Aus dieser Gleichung kann man auch direkt auf die Kongruenz $57 \pm 35 \equiv 45 \pm 29$ schließen.

und da dieser Ausdruck auch durch m teilbar ist, so muß nach dem 2) Lehrsatze $A \pm C \equiv B \pm D \pmod{m}$ sein.

Hieraus ergiebt sich der

4) **Lehrsatz:** Sind die Zahlenpaare A und B, C und D nach demselben Modul kongruent, so sind auch die Summen und die Differenzen $A \pm B$ und $C \pm D$ inbezug auf denselben Modul kongruent.

c) Es ist:

$$57 \equiv 45 \pmod{6} \quad \text{und} \quad 35 \equiv 29 \pmod{6}.$$

Das Produkt $35 \cdot 57 = 1995$, durch 6 dividiert, giebt $r = 3$, und $29 \cdot 45 = 1305$, durch den Modul dividiert, liefert ebenfalls $r = 3$; mithin ist $35 \cdot 57 \equiv 29 \cdot 45 \pmod{6}$. Wenn allgemein:

$$1) \begin{cases} A \equiv B \pmod{m} & \text{und} \\ C \equiv D \pmod{m} \end{cases}$$

so ist auch $\quad 2) \quad AC \equiv BD \pmod{m}$.

Beweis. Multipliziert man die den gegebenen Kongruenzen entsprechenden Gleichungen:

$$A = B + km \quad \text{und} \quad C = D + k'm$$

miteinander, so entsteht:

$$3) \quad AC = BD + (Bk' + Dk + kk'm)m;$$

folglich: $\quad 4) \quad AC \equiv BD \pmod{m}$.

Hieraus folgt der

5) **Lehrsatz:** Wenn zwei (oder mehrere) Zahlenpaare A und B, C und D bezüglich desselben Moduls kongruent sind, so sind auch die Produkte AC und BD nach demselben Modul kongruent.

Ist im besondern Falle $C = A$, also $D = B$ und $k = k'$, so geht die vorstehende Gleichung unter 3) in die folgende über:

$$A^2 = B^2 + (2Bk + k^2m)m;$$

folglich: $\quad A^2 \equiv B^2 \pmod{m}$.

Potenziert man die Gleichung $A = B + km$ mit dem Exponenten n, so entsteht:

$$A^n = (B + km)^n = B^n + S \cdot m^{*});$$

daher: $$A^n \equiv B^n \pmod{m}.$$

6) **Lehrsatz: Sind zwei Zahlen A und B kongruent, so sind auch ihre Potenzen A^n und B^n inbezug auf denselben Modul kongruent.**

d) Es ist: $26 : 7 = 3$ Rest 5

und $41 : 7 = 5$ Rest 6.

Die Zahlen 26 und 41 sind also inbezug auf den Modul (Divisor) 7 nicht kongruent. Dagegen ist:

$$26 \cdot 41 : 7 = 152 \text{ Rest } 2$$

und $$5 \cdot 6 : 7 = 4 \text{ Rest } 2.$$

Somit besteht die Kongruenz:

$$26 \cdot 41 \equiv 5 \cdot 6 \pmod{7},$$

d. h. das Produkt $26 \cdot 41$ ist nach dem Divisor 7 kongruent dem Produkte der Reste seiner Faktoren.

Es ist: $$70 = 5 \cdot 13 + 5$$
$$30 = 2 \cdot 13 + 4.$$

Die Multiplikation dieser Gleichungen liefert:

$$30 \cdot 70 = (2 \cdot 13 + 4) \cdot (5 \cdot 13 + 5).$$

Auf der rechten Seite die Multiplikation ausgeführt und diese Gleichung durch 13 dividiert, giebt:

$$\frac{30 \cdot 70}{12} = 2 \cdot 5 \cdot 13 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + \frac{4 \cdot 5}{13}.$$

Nun ist:

$30 \cdot 70 : 13 = 161$ Rest 7 und $4 \cdot 5 : 13 = 1$ Rest 7.

Es ist also:

$$30 \cdot 70 \equiv 4 \cdot 5 \pmod{13}.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß das Produkt $30 \cdot 70$ kongruent ist dem Produkte der Reste seiner Faktoren inbezug auf den Divisor 13.

---

*) S bezeichnet die Summe aller Produkte mit dem Faktor m (§ 49).

Allgemein sei:

$$A = km + r$$
$$B = k'm + r'$$

Diese Gleichungen multipliziert, giebt:

$$A \cdot B = (km + r)(k'm + r').$$

Durch m dividiert, liefert:

$$\frac{A \cdot B}{m} = kk'm + k'r + kr' + \frac{rr'}{m}.$$

Diese Gleichung kann nur unter der Bedingung bestehen, daß die Divisionen $AB : m$ und $rr' : m$ entweder aufgehen oder gleiche (von Null verschiedene) Reste übrig lassen. Es ist daher allgemein:

$$A \cdot B \equiv rr' \ (\text{mod.}\ m).$$

Aus den vorstehenden Entwickelungen und den daraus erhaltenen Kongruenzen folgern wir den

7) **Lehrsatz:** Das Produkt zweier oder mehrerer Zahlen ist inbezug auf jeden beliebigen Divisor kongruent dem Produkte der Reste seiner Faktoren.

3) Anwendung der Zahlenkongruenzen. Der letzte Lehrsatz bietet ein Mittel, um die Richtigkeit einer Multiplikation dekadischer Zahlen zu prüfen. Es ist z. B.:

$$67 \cdot 85 = 5695.$$

Die Faktoren des Produktes durch eine beliebige Zahl, z. B. 8, dividiert giebt:

67 : 8 = 8 Rest 3
85 : 8 = 10 Rest 5.

Das Produkt der Reste, nämlich $5 \cdot 3 = 15$, durch 8 dividiert läßt 7 übrig. Das Ergebnis der Rechnung 5695 ist nach vorstehendem Lehrsatze richtig, wenn $5695 \equiv 5 \cdot 3$ (mod. 8). Nun ist $5695 : 8 = 711$ Rest 7. Die Kongruenz ist also wirklich vorhanden und mithin ist die Gleichung:

$67 \cdot 85 = 5695$ richtig.

Da die Division einer dekadischen Zahl durch 9 denselben Rest liefert, den die Quersumme übrig läßt (§ 67), so benutzt man der einfachen und schnellen Rechnung wegen in der Regel zur Prüfung der Richtigkeit einer ausgeführten Multiplikation den Divisor 9. Z. B. $74 \cdot 58 = 4292$.

Die Quersumme von 4292 ist:

$$4 + 2 + 9 + 2 = 17; \quad 17 : 9 = 1 \text{ Rest } 8.$$

Die Quersumme von 74 ist:

$$7 + 4 = 11; \quad 11 : 9 = 1 \text{ Rest } 2.$$

Die Quersumme von 58 ist:

$$5 + 8 = 13; \quad 13 : 9 = 1 \text{ Rest } 4.$$

Das Produkt der Reste $2 \cdot 4 = 8$ durch 9 dividiert läßt 8 übrig. Es ist daher:

$$4292 \equiv 2 \cdot 4 \text{ (mod. 9)}.$$

Dieses unter dem Namen „Neunerprobe" aus dem Rechenunterrichte bekannte Verfahren ist nicht zuverlässig, da diese Probe auch dann stimmt, wenn durch unrichtiges Untereinandersetzen der (richtigen) Teilprodukte eine falsche Antwort vorliegt.

Die Zahlenkongruenzen können ferner dazu benutzt werden, die Gesetze der Teilbarkeit einer dekadischen Zahl durch 9 und 11 (§ 67) zu beweisen.

a) Beweis für die Teilbarkeit durch 9. Die dekadische Zahl sei:

$$N = \cdots e \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a.$$

Es ist:

$$a \equiv a \text{ (mod. 9)}$$
$$b \cdot 10 \equiv b \text{ (mod. 9)}$$
$$c \cdot 10^2 \equiv c \text{ (mod. 9)}$$
$$d \cdot 10^3 \equiv d \text{ (mod. 9)}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

mithin:

$$\cdots e \cdot 10 + d \cdot 10 + c \cdot 10 + b \cdot 10 + a$$
$$\equiv a + b + c + d + \cdots \text{ (mod. 9)}.$$

b) Beweis für die Teilbarkeit durch 11.

Lehrsatz: Jede dekadische Zahl N ist inbezug auf den Divisor 11 kongruent der Differenz aus den Quersummen der ungeraden und der geraden Stellen.

Es sei wieder:

$$N = \cdots\cdot d\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a.$$

Nun ist:

$$a \equiv a \pmod{11}$$
$$b\cdot 10 \equiv -b \pmod{11}$$
$$c\cdot 10^2 \equiv c \pmod{11}$$
$$d\cdot 10^3 \equiv -d \pmod{11}.$$

Folglich:

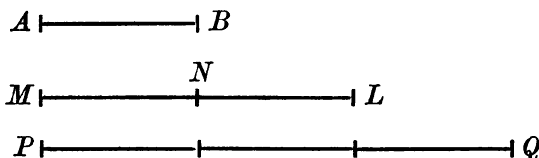
$$\cdots\cdot d^2\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a$$
$$\equiv a + c - (b + d) \pmod{11}.$$

Anmerkung. Gauß (1777—1855), Professor der Mathematik in Göttingen, hat die Lehre von den Zahlenkongruenzen und auch die Bezeichnung der Kongruenz geschaffen.

§ 69. Begriff und Eigenschaften der Verhältnisse.

Auf die Frage: „Wie verhält sich die Strecke AB zur Strecke ML?“ kann man antworten: 1) die Strecke ML ist

Fig. 25.



um das Stück NL größer als AB, und 2) Strecke AB enthält einen Teil von derselben Größe, wie die zweite zwei Teile enthält. Statt der letzteren Redensart sagt man auch, die beiden Strecken verhalten sich wie 1 zu 2, oder sie stehen im Verhältnisse 1 zu 2. Beide Antworten drücken das Ergebnis der Vergleichung der Strecken AB und ML bezüglich ihrer Größe aus. Zwei gleichartige Größen können auf zweifache Weise verglichen werden: a) man ermittelt, um wieviel größer oder kleiner die eine Größe als die andere ist; b) man

untersucht, wie oft die kleinere in der größeren enthalten, oder was dasselbe ist, man bestimmt, wieviel mal so groß die eine als die andere ist. Beide Vergleichungen sind offenbar nichts anderes als ein Messen (vgl. §§ 11 und 65). Werden zwei Größen auf die eine oder die andere Art verglichen, so sagt man, man bestimme das **Verhältnis**, in welchem dieselben stehen. Das Ergebnis der Vergleichung, welches den **Unterschied** beider Größen angiebt, nennt man ein **arithmetisches** Verhältnis. Dagegen heißt das Ergebnis, welches durch die Vergleichung unter b) entsteht, das **geometrische** Verhältnis der verglichenen Größen.

Verhältnisse sind allgemein zwischen gleichartigen Größen möglich, z. B. zwischen Strecken, zwischen Flächen, zwischen Körpern, zwischen Zahlen, unter der Bedingung, daß die beiden zu vergleichenden Größen mit demselben Maße gemessen sind oder doch gleichnamig gemacht werden können, z. B. 2 hl zu 20 l gleich 200 l zu 20 l. Die Strecke ML besteht aus zwei gleichen Teilen von derselben Länge, wie die Strecke PQ deren drei enthält, beide verhalten sich mithin wie 2 zu 3. Haben die beiden Größen ein von der Einheit verschiedenes gemeinschaftliches Maß, so kann man ihr Verhältnis durch die beiden Zahlen ausdrücken, welche angeben, wie oft jede von ihnen dieses Maß enthält. So z. B. kann das Verhältnis der Flächeninhalte zweier Rechtecke von 12 qcm ($= 3 \times 4$ qcm) und 16 qcm ($= 4 \times 4$ qcm) durch „3 zu 4" bezeichnet werden. Ganz auf dieselbe Weise wie Raumgrößen werden auch zwei Zahlen verglichen. Soll man z. B. 8 ℳ und 12 ℳ vergleichen, so ist 12 ℳ — 8 ℳ = 4 ℳ das arithmetische Verhältnis, und da 8 ℳ, 2×4 ℳ und 12 ℳ, 3×4 ℳ enthalten, so heißt das geometrische Verhältnis dieser Zahlen „2 zu 3". Die Zahlen 20 und 25 verhalten sich wie 4 zu 5; denn die Zahl 20 enthält das größte Maß 4 mal und die Zahl 25 dasselbe Maß 5 mal.

Das arithmetische Verhältnis zweier Zahlen a und b wird durch ihre Differenz $a - b$ dargestellt, das geometrische Verhältnis derselben bezeichnet man durch den Quotienten

$a:b$, gelesen: „a verhält sich zu b“, oder kurz „a zu b“. Die Zahlen, welche ein Verhältnis bilden, werden Glieder desselben genannt. Der Dividend a erhält nun den Namen Vorderglied und der Divisor b heißt Hinterglied. Da die Glieder eines geometrischen Verhältnisses auch benannte Zahlen sein können, z. B. 5 m : 25 cm, so muß der Ausdruck $a:b$ konsequent als Messen (§ 11) aufgefaßt werden, mit anderen Worten, das Verhältnis $a:b$ giebt Antwort auf die Frage, wie oft das Hinterglied im Vorderglied enthalten ist. Für das Ergebnis der Rechnung ist es allerdings gleichgültig, ob man den Ausdruck als Verhältnis oder „a dividiert durch b“ liest.

Bei dem arithmetischen Verhältnis nennt man diejenige Zahl, welche zum Hinterglied hinzugefügt das Vorderglied giebt, die Differenz des Verhältnisses. Die Zahl, welche angiebt, wie oft das Hinterglied in dem Vorderglied eines geometrischen Verhältnisses enthalten ist, heißt Zeiger oder Exponent. Derselbe ist seinem Begriffe gemäß stets eine reine Zahl, gleichviel, ob die beiden Glieder des Verhältnisses benannt oder unbenannt sind, z. B.:

15 : 5, Zeiger 3,

12 ℳ : 8 ℳ, Zeiger $\frac{3}{2}$,

4 m : 6 m, Zeiger $\frac{2}{3}$,

$a:b$, Zeiger $\frac{a}{b}$.

Das geometrische Verhältnis $a:b$ heißt steigend, wenn $a < b$, dagegen fallend, wenn $a > b$ ist. Verhältnisse, welche denselben Exponenten haben, sind gleich, z. B. 8 : 4 und 10 : 5. Nur zwischen gleichartigen Verhältnissen kann Gleichheit bestehen, also kann niemals ein steigendes Verhältnis einem fallenden gleich sein. Bei Vergleichung von drei Zahlen, z. B. 18, 24 und 30, kann man drei geometrische Verhältnisse bilden, nämlich 18 : 24, 18 : 30 und 24 : 30 oder 3 : 4, 3 : 5 und 4 : 5. In der Regel werden diese einzelnen Verhältnisse durch ein Verhältnis dargestellt, indem man schreibt 3 : 4 : 5.

Der Ausdruck 5:6:7 besteht also aus den Verhältnissen 5:6, 5:7 und 6:7.

Da das arithmetische Verhältnis seinen Ausdruck in der Differenz $a - b$ findet und das geometrische Verhältnis durch den Quotienten $a:b$ dargestellt wird und beide Auffassungen dasselbe Resultat liefern, so müssen alle Gesetze über Differenzen und Quotienten auch für Verhältnisse gültig sein.

Den Lehrsätzen 2) und 5) in § 5 entsprechen folgende Wahrheiten über das arithmetische Verhältnis.

1) **Lehrsatz:** Das Vorderglied eines arithmetischen Verhältnisses ist gleich der Summe aus dem Hinterglied und der Differenz.

In Zeichen:

Wenn $a - b = c$, so ist $a = b + c$.

2) **Lehrsatz:** Der Wert eines arithmetischen Verhältnisses ändert sich nicht, wenn man sowohl zum Vorderglied als zum Hinterglied dieselbe Zahl addiert, oder von beiden dieselbe Zahl subtrahiert.

Über das geometrische Verhältnis bestehen nach § 12 folgende Gesetze.

3) **Lehrsatz:** Das Vorderglied eines geometrischen Verhältnisses ist gleich Hinterglied mal Exponenten.

In Zeichen: $a = b \cdot c = c \cdot b$.

4) **Lehrsatz:** Das Hinterglied ist gleich dem Quotienten aus dem Vorderglied und dem Exponenten.

In Zeichen: $b = a : c$.

5) **Lehrsatz:** Der Wert eines geometrischen Verhältnisses bleibt ungeändert, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

In Zeichen:

$$a : b = am : bm = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}.$$

Diese Wahrheit kann auch noch besonders auf folgende Weise bewiesen werden.

Der Exponent des Verhältnisses $a : b$ sei x, so ist:

$$1) \quad a = x \cdot b,$$

d. h. a ist das $x$fache von b.

Gleichung 1) mit m multipliziert giebt:

$$2) \quad am = x \cdot b \cdot m;$$

am ist das $x$fache von bm.

Durch Division der Gleichung 1) durch m entsteht:

$$3) \quad \frac{a}{m} = x \cdot \frac{b}{m},$$

d. h. $\frac{a}{m}$ ist das $x$fache von $\frac{b}{m}$.

Dividiert man Gleichung 2) durch bm und 3) durch $\frac{b}{m}$, so ergiebt sich:

$$4) \quad am : bm = x$$

und

$$5) \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = x.$$

Mithin ist:

$$a : b = am : bm = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}.$$

Man benutzt diesen Lehrsatz, um ein Verhältnis, das durch Brüche bezeichnet ist, durch ganze Zahlen auszudrücken und um Verhältnisse zwischen größeren Zahlen in kleineren zu geben, z. B.:

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ gleich $6 \cdot \frac{1}{2} : 6 \cdot \frac{1}{3} = 3 : 2$; $60 : 45$ gleich $4 : 3$.

In praktischen Fällen bringt man häufig das Vorderglied eines Verhältnisses auf 1 und auf 100, weil man mit dieser Form bequem rechnen kann und sich der Wert eines solchen Verhältnisses leicht überschauen läßt. So sagt man: Das Verhältnis des Durchmessers zum Kreise ist $1 : 3\frac{1}{7}$ oder $1 : 3{,}14$. Ein Hektar verhält sich zum preußischen Morgen annähernd wie $100 : 25$.

6) **Lehrsatz:** Haben zwei gleiche Verhältnisse gleiche Hinterglieder, so sind auch ihre Vorderglieder gleich. Gleiche Verhältnisse mit gleichen Vordergliedern haben auch gleiche Hinterglieder. (Vergleiche § 12, 7 und 8.)

§ 70. Die arithmetischen Proportionen.

Die Verbindung zweier gleichen Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen nennt man eine Proportion. Je nach der Art der Verhältnisse, die in einer Proportion vorkommen, nennt man dieselbe eine arithmetische oder eine geometrische. Eine arithmetische Proportion entsteht durch die Gleichstellung zweier gleichen arithmetischen Verhältnisse. Dieselbe wird auch wohl „Differenzgleichung" genannt. Verbindet man die arithmetischen Verhältnisse 12 — 8 und 10 — 6 durch das Gleichheitszeichen, so ist:

$$12 - 8 = 10 - 6$$

eine arithmetische Proportion; wenn:

$$a - b = c - d,$$

so ist diese Gleichung die allgemeine Form derselben. Diese Proportion wird gelesen: a verhält sich arithmetisch zu b, wie c zu d. Da die Differenz von zwei ungleich benannten Zahlen nach § 5, 1 sinnlos ist, so müssen sämtliche Glieder einer arithmetischen Proportion gleichartig sein, bezw. in gleichnamige verwandelt werden können. Verbindungen wie:

$$12 \mathcal{M} - 8 \mathcal{M} = 10 \text{ hl} - 6 \text{ hl}$$

haben keine Geltung. Die vier Zahlen einer Proportion heißen (wie bei den Verhältnissen) Glieder derselben und sie werden in Vorder- und Hinterglieder unterschieden. Die Vorderglieder a und c, bezw. die Hinterglieder b und d, heißen homologe. Ferner bezeichnet man das erste und vierte Glied mit dem gemeinschaftlichen Namen Außenglieder, während das zweite und dritte Glied zusammen Innenglieder genannt werden. Sind in einer Proportion die Innenglieder oder die Außenglieder gleich, wie z. B. in den Proportionen:

$$a - b = b - c \quad \text{und} \quad a - b = c - a,$$

so heißt dieselbe eine stetige. Die Zahl b oder a, welche zweimal als Glied vorkommt, wird „mittlere arithmetische Proportionale" genannt.

Wenn man auf beiden Seiten der Proportion:

$$12 - 8 = 10 - 6$$

die Summe $8 + 6$ addiert, so entsteht:

$$12 + 6 = 10 + 8,$$

und addiert man in der allgemeinen Proportion:

$$a - b = c - d$$

beiderseits $b + d$, so ergiebt sich:

$$a + d = c + d,$$

d. h. in Worten:

Lehrsatz: Jn jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der Außenglieder gleich der Summe der Innenglieder.

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Proportion richtig, im andern Falle unrichtig. Dieser Lehrsatz giebt uns also ein Mittel an die Hand, die Richtigkeit einer arithmetischen Proportion zu prüfen.

Nach dem ersten Lehrsatze folgt aus der stetigen arithmetischen Proportion $a - b = b - c$:

$$2b = a + c; \quad \text{mithin} \quad b = \frac{a + c}{2}.$$

Den Wert für b nennt man das arithmetische Mittel der Zahlen a und b. Definition: Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist die Hälfte von ihrer Summe. Man dehnt diese Definition auf eine beliebige Anzahl Zahlen aus und versteht unter dem arithmetischen Mittel x von n Zahlen $a, b, c, d \cdots\cdots m$ die Summe derselben, dividiert durch ihre Anzahl n, also:

$$x = \frac{a + b + c + \cdots m}{n}.$$

Anwendung des arithmetischen Mittels. Die Berechnung des arithmetischen Mittels findet im praktischen Leben vielfache Anwendung. So z. B. um die durchschnittlichen Einnahmen und Ausgaben in einem Tage, in einer Woche, in einem Monat, in einem Quartale zu erfahren; bei Ermittelung

des Durchschnittszinsfußes gleicher Kapitalien, die zu verschiedenem Zinsfuße ausgeliehen sind; zur Bestimmung des mittleren Zahlungstermines von gleichen Kapitalien, die zu gleichem Zinsfuß ausstehen und zu verschiedenen Terminen fällig sind; ferner in der Mischungsrechnung, um den Durchschnittspreis gleicher Quantitäten zu suchen; bei Berechnung des Durchschnittsertrages von Grundstücken. Bei statistischen Berechnungen wird das arithmetische Mittel gesucht, um die durchschnittliche Anzahl der Todesfälle oder Geburten innerhalb eines bestimmten Zeitraumes festzustellen. Auch die Geometrie und die Naturwissenschaft bedienen sich vielfach des arithmetischen Mittels bei Messungen, Schätzungen und Berechnungen. Wird z. B. bei Vermessung einer Feldmark eine Hauptlinie dreimal gemessen und erhält man die Resultate:

$$168{,}80\,\text{m}, \quad 168{,}70\,\text{m}, \quad 168{,}30\,\text{m},$$

so nimmt man als Maß derselben:

$$\tfrac{1}{3}(168{,}80 + 168{,}70 + 168{,}30)\,\text{m} = 168{,}60\,\text{m}$$

an. Erhält man durch vier Schätzungen eines Winkels die Werte:

$$46\tfrac{1}{2}^0, \quad 47^0, \quad 45\tfrac{1}{2}^0 \quad \text{und} \quad 45^0,$$

so betrachtet man:

$$\tfrac{1}{4}(46\tfrac{1}{2}^0 + 47^0 + 45\tfrac{1}{2}^0 + 45^0) = 46^0$$

als die wirkliche Größe des Winkels. Zur Feststellung der mittleren Tages- und Monatstemperatur, des mittleren Barometerstandes eines Ortes auf der Erdoberfläche wird ebenfalls das arithmetische Mittel genommen.

Die geometrischen Proportionen.

§ 71. Begriff der geometrischen Proportion.

Die Verbindung zweier gleichen geometrischen Verhältnisse (§ 69) durch das Gleichheitszeichen nennt man eine geometrische Proportion, z. B. $2:3 = 10:15$. Ihre allgemeine Form ist:

$$a : b = c : d,$$

gelesen: „a (verhält sich) zu b wie c zu d". Der Name geo-

metrische Proportion rührt daher, weil diese Art Proportion in der Geometrie eine bedeutende Anwendung findet. Statt obiger Darstellung der Proportion schreibt man auch vielfach die Quotientengleichung:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

welche Auffassung für die Rechnung keinen Unterschied macht. Die in § 69 für die Glieder einer arithmetischen Proportion erläuterten Namen gelten auch für die geometrische Proportion. Sind in einer geometrischen Proportion die Innen- oder die Außenglieder gleich, so heißt dieselbe eine stetige, z. B.:

$$a : x = x : b.$$

Man nennt die Größe x die „mittlere geometrische Proportionale" oder das geometrische Mittel zwischen den Zahlen a und b. Während sämtliche Glieder einer arithmetischen Proportion durchaus gleichartig sein müssen, können in einer geometrischen Proportion die Glieder des einen Verhältnisses inbezug auf die Glieder des andern ungleichnamig sein. Ebenso kann ein Verhältnis benannt, das andere unbenannt sein. So ist z. B.:

$$5 \mathcal{M} : 15 \mathcal{M} = 8\,\mathrm{m} : 24\,\mathrm{m}$$

eine richtige Proportion (vergl. § 69). Bezeichnet man zwei verschiedene Quantitäten allgemein mit q_1 und q_2, so ist:

$$aq_1 : bq_1 = cq_2 : dq_2$$

völlig übereinstimmend mit:

$$a : b = c : d.$$

§ 72. Lehrsätze über geometrische Proportionen.

Wenn man beide Verhältnisse der geometrischen Proportion $a : b = c : d$ mit bd multipliziert (§ 69), so entsteht:

$$ad = bc.$$

Dieselbe Produktengleichung kann aus der gegebenen Proportion mit Hilfe des Exponenten abgeleitet werden.

Es sei:

$$a:b = e; \quad \text{also} \quad 2) \quad a = b \cdot e,$$

so ist auch: $c:d = e$; mithin 3) $d \cdot e = c$.

Die Multiplikation von 2) mit 3) liefert: $ade = bce$; also $ad = bc$. Hieraus folgt das

1) **Hauptgesetz:** In jeder geometrischen Proportion (aus reinen Zahlen) ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

Dieser Lehrsatz bietet ein Mittel zur Prüfung der Richtigkeit einer jeden vorgelegten geometrischen Proportion. So ist z. B. die Proportion:

$$8:15 = 24:45$$

richtig und die Proportion:

$$a + b : a - b = a^2 + b^2 : a^2 - b^2$$

unrichtig; es ist nämlich:

$$(a + b)^2 > a^2 + b^2.$$

2) **Lehrsatz:** Eine geometrische Proportion ist stets richtig, wenn das Produkt der inneren Glieder dem Produkt der Außenglieder gleich ist. (Umkehrung von 1.)

Aus der Produktengleichung $ad = bc$ kann man mit Anwendung von § 12, 6 die folgenden richtigen Gleichungen ableiten:

$$a = \frac{b \cdot c}{d}; \qquad d = \frac{b \cdot c}{a};$$

$$b = \frac{a \cdot d}{c} \quad \text{und} \quad c = \frac{a \cdot d}{b}.$$

Man findet aus:

$$a:b = c:x \quad \text{und} \quad a:y = c:d$$

für die unbekannten Zahlen x und y die Gleichungen:

$$x = \frac{b \cdot c}{a} \quad \text{und} \quad y = \frac{a \cdot d}{c}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt der

3) **Lehrsatz:** Man erhält den Wert für ein Außenglied einer Proportion, wenn man das Produkt der

inneren Glieder durch das andere äußere Glied dividiert. Ein (unbekanntes) inneres Glied ist gleich dem Produkte der Außenglieder, dividiert durch das bekannte innere Glied.

Zusatz: Sind in zwei Proportionen drei gleichstellige Glieder bezüglich gleich, so sind auch die vierten Glieder einander gleich. Aus $a : b = c : x$ und $a : b = c : y$ folgt:

$$x = y = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Mit Anwendung des Hauptgesetzes ergiebt sich aus der stetigen Proportion:

$$4 : x = x : 9, \quad x^2 = 36; \quad \text{mithin} \quad x = \sqrt{36} = 6.$$

Wenn allgemein:

$$a : x = x = b, \quad \text{so ist} \quad x = \sqrt{ab};$$

in Worten:

4) **Lehrsatz:** Die mittlere geometrische Proportionale zu zwei gegebenen Zahlen a und b ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte ab.

§ 73. Veränderungen einer geometrischen Proportion.

Man kann mit einer Proportion, unbeschadet ihrer Richtigkeit, mannigfache Veränderungen vornehmen.

a) Es sei die Proportion $a : b = c : d$ gegeben, so ist:

$$ma : mb = nc : nd$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$$

$$ma : b = mc : d$$

$$a : nb = c : nd$$

$$ma : nb = mc : nd$$

$$\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$$

$$a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n}$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}.$$

Diese sämtlichen aus $a:b=c:d$ abgeleiteten Proportionen sind zufolge des Hauptgesetzes richtig. Bei allen Umformungen einer Proportion achte man darauf, daß dieselbe das Hauptgesetz erfüllt.

b) Setzt man an Stelle obiger Proportion die gleichwertige Quotientengleichung:

$$1)\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

und potenziert beide Quotienten nach § 68 mit n, so entsteht:

$$2)\quad \frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n},$$

in Proportionsform:

$$3)\quad a^n : b^n = c^n : d^n .$$

Radiziert man die Gleichung 1) durch n, so erhält man zufolge § 26 und § 27, 3:

$$4)\quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} .$$

Die Gleichungen unter a), sowie die Gleichungen 3) und 4) unter b) sprechen folgende Wahrheit aus:

1) **Lehrsatz:** a) **Die Richtigkeit einer Proportion bleibt ungeändert, wenn man ihre homologen Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.** b) **Eine Proportion bleibt richtig, wenn man alle Glieder mit derselben Zahl potenziert oder durch dieselbe Zahl radiziert.**

Versetzungen der Proportion. Aus dem 1) Lehrsatze § 72 folgt: Sind zwei gleiche Produkte aus je zwei Faktoren gegeben, so kann man aus der Produktengleichung eine richtige Proportion ableiten, in welcher die Faktoren des einen Produktes die inneren, und die Faktoren des andern die äußeren Glieder bilden. Bei Bildung einer Proportion aus einer gegebenen Produktengleichung fange man mit einem beliebigen Faktor an, lasse die Faktoren des andern Produktes folgen und setze schließlich den andern Faktor des ersten Produktes. Da man mit jedem Faktor zweimal beginnen kann, so lassen sich

aus einer Produktengleichung $ad = bc$ acht Proportionen aufstellen:

Gegeben:	$4 \cdot 9 = 3 \cdot 12$	Gegeben:	$ad = bc.$
1)	$4 : 3 = 12 : 9$	1)	$a : b = c : d$
2)	$4 : 12 = 3 : 9$	2)	$a : c = b : d$
3)	$9 : 3 = 12 : 4$	3)	$b : a = d : c$
4)	$9 : 12 = 3 : 4$	4)	$b : d = a : c$
5)	$3 : 4 = 9 : 12$	5)	$c : a = d : b$
6)	$3 : 9 = 4 : 12$	6)	$c : d = a : b$
7)	$12 : 4 = 9 : 3$	7)	$d : b = c : a$
8)	$12 : 9 = 4 : 3.$	8)	$d : c = b : a.$

Dieselben Proportionen können auch aus der Quotientengleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gebildet werden. Die Richtigkeit der vorstehenden acht Proportionen folgt aus dem 2) Lehrsatze § 71, die Produktengleichungen sind nämlich sämtlich $ad = bc$. Man nennt die Proportionen 2) bis 8) „Versetzungen" der ersten Proportion, weil sie durch Versetzen der Glieder der Proportion $a : b = c : d$ entstanden sind. Aus Vorstehendem ergiebt sich der

2) **Lehrsatz:** Aus zwei gleichen Produkten mit je zwei Faktoren oder aus der Quotientengleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ können acht richtige Proportionen gebildet werden. — In jeder Proportion kann man die inneren sowie die äußeren Glieder beliebig vertauschen und auch die äußeren Glieder zu inneren machen und umgekehrt.

§ 74. Die Summen- und Differenzensätze über Proportionen.

Es sei die Proportion $15 : 9 = 10 : 6$ gegeben. Hieraus kann man durch Addition oder Subtraktion der Glieder des ersten Verhältnisses und durch dieselbe arithmetische Verbindung der Glieder des zweiten Verhältnisses die folgende richtige Proportion ableiten:

$$15 + 9 : 10 + 6 = 15 : 10 = 9 : 6.$$

Der Proportion $a:b = c:d$ entspricht die Quotientengleichung:

$$1) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Wenn man auf beiden Seiten ± 1 addiert, so entsteht:

$$2) \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

Diese Gleichung in Proportionsform dargestellt, giebt:

$$3) \quad a \pm b : b = c \pm d : d.$$

Durch Vertauschung der Innenglieder erhält man:

$$4) \quad a \pm b : c \pm d = b : d,$$ in Worten:

1) **Lehrsatz:** In jeder Proportion verhält sich die Summe (Differenz) der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe (Differenz) der Glieder des zweiten Verhältnisses, wie die Vorderglieder oder wie die Hinterglieder.

Zusatz: Verbindet man die Quotienten beiderseits mit $\pm n$, so erhält man durch die vorige Entwickelung:

$$a \pm nb : c \pm nd = a : c = b : d.$$

Die Proportion unter 4) umfaßt die beiden Proportionen:

$$1) \quad a + b : c + d = b : d$$

$$2) \quad a - b : c - d = b : d.$$

Wegen Gleichheit des Verhältnisses $b : d$ folgt hieraus unmittelbar:

$$3) \quad a + b : c + d = a - b : c - d$$

oder mit Vertauschung der inneren Glieder:

$$4) \quad a + b : a - b = c + d : c - d.$$

Diese Proportion spricht folgende Wahrheit aus:

2) **Lehrsatz:** In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zur Differenz derselben wie die Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses zu ihrer Differenz.

Die vorstehenden beiden Lehrsätze können in eine Wahrheit zusammengefaßt werden. Die Formel, welche diesen allgemeinen Lehrsatz ausspricht, findet man auf folgendem Wege:

Mit Benutzung von § 73, 1) Lehrsatz erhält man aus $a:b = c:d$:

$$\text{I)} \quad ma:nb = mc:nd.$$

$$1) \quad pa:qb = pc:qd.$$

Nach § 74, 1) Lehrsatz ist:

$$\text{II)} \quad ma \pm nb : mc \pm nd = ma : mc;$$

$$2) \quad pa \pm qb : pc \pm qd = pa : pc;$$

oder:

$$\text{III)} \quad ma \pm nb : mc \pm nd = a : c.$$

$$3) \quad pa \pm qb : pc \pm qd = a : c.$$

Aus den Proportionen unter III) und 3) ergiebt sich wegen Gleichheit des zweiten Verhältnisses:

$$ma \pm nb : mc \pm nd = pa \pm qb : pc \pm qd$$

oder durch Vertauschung der Innenglieder:

$$\boldsymbol{ma \pm nb : pa \pm qb = mc \pm nd : pc \pm qd.}$$

Diese allgemeine Formel spricht folgendes arithmetische Gesetz aus:

3) **Lehrsatz:** In jeder Proportion verhält sich eine beliebige arithmetische Verbindung der Glieder des ersten Verhältnisses zu einer beliebigen andern Verbindung derselben Glieder wie dieselben Verbindungen der Glieder des zweiten Verhältnisses sich verhalten.

Dieser Lehrsatz wird nach Bardey **„Satz von der korrespondierenden Addition und Subtraktion“** genannt. Vorstehende allgemeine Formel enthält viele besondere Fälle, da die Faktoren m, n, p und q beliebige positive und negative Zahlen, die Null eingeschlossen, bezeichnen können. So z. B. fließt die Proportion des 2) Lehrsatzes aus der allgemeinen Formel, wenn man:

$$m = n = p = q = 1$$

setzt. Ist $p = 0$ und $q = 1$, so entsteht:

$$ma \pm nb : b = mc \pm nd : d.$$

Wenn $m = 1$ und $n = 0$, so erhält man:

$$a : pa \pm qb = c : cp \pm qd \quad \text{u. s. f.}$$

Vertauscht man in der Proportion $a:b = c:d$ die inneren Glieder und wendet auf diese Proportion den 1) Lehrsatz an, so erhält man:

$$1) \quad a \pm c : b \pm d = a : b = c : d.$$

Hieraus zufolge des 2) Lehrsatzes:

$$2) \quad a + c : a - c = b + d : b - d.$$

Die Proportion 1) lautet in Worten:

4) **Lehrsatz:** In jeder Proportion verhält sich die Summe (Differenz) der Vorderglieder zur Summe (Differenz) der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Aus Proportion 2) folgt:

5) **Lehrsatz:** Die Summe der Vorderglieder verhält sich zu ihrer Differenz, wie dieselben arithmetischen Verbindungen der Hinterglieder sich verhalten.

Der 4) Lehrsatz läßt eine Verallgemeinerung zu. Zufolge des 1) Lehrsatzes § 73 folgt aus $a : b = c : d$:

$$ma : mb = nc : nd.$$

Durch Vertauschung der Innenglieder:

$$ma : nc = mb : nd.$$

Mit Benutzung des 3) Lehrsatzes hat man:

$$ma \pm nc : mb \pm nd = ma : mb, \qquad \text{mithin:}$$

$$\mathbf{a : b = c : d = ma \pm nc : mb \pm nd;} \qquad \text{d. h.:}$$

6) **Lehrsatz:** In jeder Proportion verhält sich eine beliebige arithmetische Verbindung der Vorderglieder zu derselben arithmetischen Verbindung der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Zusatz: Die letzte Proportion ist ein besonderer Fall der folgenden:

$$ma \pm nc : mb \pm nd = pa \pm qc : pb \pm qd.$$

Letztere geht in die vorstehende Proportion über, wenn $p = 1$ und $q = 0$, oder $p = 0$ und $q = 1$ gesetzt wird.

Anmerkung. Die Lehrsätze in diesem Paragraphen bieten ein vorzügliches Mittel zur Vereinfachung von Gleichungen, in welchen Quotienten algebraischer Summen vorkommen. So z. B. hat man mit Benutzung des 2) Lehrsatzes aus:

$$\frac{x+4}{x-4} = \frac{11}{3} \quad \text{sofort} \quad \frac{x}{4} = \frac{7}{4};$$

mithin $x = 7$. Zufolge des 5) Lehrsatzes erhält man aus:

$$x + a : b = x - a : c \quad \text{sofort} \quad \frac{x}{a} = \frac{b+c}{b-c};$$

folglich $x = a \cdot \dfrac{b+c}{b-c}$ nach § 12, 1). Aus der Quotientengleichung:

$$\frac{x^2 + 5x + 12}{x^2 + 9x - 4} = \frac{x^2 + 5x - 4}{x^2 + 9x - 20}$$

folgt nach 6) direkt: $\dfrac{x^2 + 5x + 12}{x^2 + 9x - 4} = 1$.

Für die im folgenden Abschnitt behandelte Auflösungslehre der Gleichungen merke man noch folgendes: Aus der Proportion $x : y = a : b$ folgt, wenn man die inneren Glieder vertauscht und den Exponenten der Verhältnisse dieser Proportion mit t bezeichnet:

$$x = at \quad \text{und} \quad y = bt.$$

Ist also z. B. $x : y = 7 : 5$ gegeben, so kann man

$$x = 7t \quad \text{und} \quad y = 5t \qquad \text{setzen.}$$

§ 75. Zusammensetzen der Proportionen.

Wenn man die gleichstelligen Glieder der Proportionen:

1) $9 : 6 = 18 : 12$, Exponent $\frac{3}{2}$,

2) $4 : 5 = 8 : 10$, Exponent $\frac{4}{5}$,

multipliziert, so entsteht:

3) $36 : 30 = 144 : 120$, Exponent $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$.

Da beide Verhältnisse dieser neuen Proportion denselben Exponenten $\frac{6}{5}$ haben, so ist dieselbe richtig. Dividiert man die Glieder der ersten Proportion durch die entsprechenden Glieder der zweiten, so erhält man:

$$4)\quad \frac{9}{4} : \frac{6}{5} = \frac{18}{8} : \frac{12}{10}, \quad \text{Exponent } \frac{3}{2} : \frac{4}{5} = \frac{15}{8}.$$

Die Verhältnisse dieser abgeleiteten Proportion haben den gleichen Exponenten $\frac{15}{8}$; mithin ist auch die 4) Proportion richtig.

Erklärung: Aus zwei oder mehreren vorgelegten Proportionen durch Multiplikation oder Division der gleichstelligen Glieder eine einzige Proportion ableiten heißt, „Proportionen zusammensetzen".

Bildet man aus zwei gegebenen Proportionen mit den Exponenten e_1 und e_2 durch Multiplikation eine dritte, so hat diese zusammengesetzte Proportion den Exponenten $e_1 \cdot e_2$. Die aus denselben Proportionen durch Division abgeleitete hat den Exponenten $\frac{e_1}{e_2}$, bezw. $\frac{e_2}{e_1}$.

Sind allgemein die gleichzeitig bestehenden Proportionen:

$$a : b = c : d$$

$$a_1 : b_1 = c_1 : d_1$$

gegeben, so ist:

$$1)\quad aa_1 : bb_1 = cc_1 : dd_1$$

$$2)\quad \frac{a}{a_1} : \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} : \frac{d}{d_1}.$$

Beweis. Nach dem Hauptgesetze (§ 72) ergeben sich aus den gegebenen Proportionen die Gleichungen:

$$3)\quad ad = bc$$

$$4)\quad a_1 d_1 = b_1 c_1.$$

Durch Multiplikation von 3) und 4) entsteht:

$$ad \cdot a_1 d_1 = bc \cdot b_1 c_1,$$

welche Produktengleichung sich mit der abgeleiteten Proportion unter 1) deckt. Die Division der 3) Gleichung durch 4) liefert:

$$\frac{ad}{a_1 d_1} = \frac{bc}{b_1 c_1} \qquad \text{(zufolge § 12, 6)}$$

und diese Quotientengleichung stimmt mit der Produktengleichung der Proportion unter 2) überein. Hieraus ergiebt sich der

Lehrsatz: Wenn man die gleichstelligen Glieder von zwei (oder mehreren) Proportionen multipliziert oder dividiert, so erhält man eine neue richtige Proportion.

Zufolge dieses Gesetzes kann man aus den Proportionen:

$$x : y = 5 : 8 \quad \text{und} \quad z : u = 4 : 15$$

durch Multiplikation

$$xz : yu = 20 : 120 = 1 : 6 \qquad \text{und}$$
$$ux : yz = 75 : 32 \qquad \text{zusammensetzen.}$$

2) Aus der Reihe von Proportionen:

1) $A : B = f : g$
2) $B : C = h : k$
3) $C : D = m : n$
4) $D : E = p : q$

erhält man durch Multiplikation von:

1) und 2) $A : C = fh : gk$
1) bis 3) $A : D = fhm : gkn$
1) bis 4) $A : E = fhmp : gknq$.

Da das Verhältnis $A : E$ dem Produkt der Verhältnisse:

$$f : g, \quad h : k, \quad m : n \quad \text{und} \quad p : q$$

gleich ist, so sagt man, $A : E$ sei aus diesen Verhältnissen zusammengesetzt.

§ 76. Fortlaufende Proportionen.

Sind Proportionen von der Form gegeben, daß die Hinterglieder mit den folgenden Vordergliedern übereinstimmen, z. B.:

$$1) \quad \begin{cases} a : b = a_1 : b_1 \\ b : c = b_1 : c_1 \\ c : d = c_1 : d_1 , \end{cases}$$

so kann man daraus auf dieselbe Art wie vorhin (§ 75, 2) ableiten:

$$2)\ \begin{cases} a : b = a_1 : b_1 \\ a : c = a_1 : c_1 \\ a : d = a_1 : d_1 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} a : a_1 = b : b_1 \\ a : a_1 = c : c_1 \\ a : a_1 = d : d_1 . \end{cases}$$

Die Proportionen unter 3) folgen aus 2) durch Vertauschung der Innenglieder. Aus 3) folgt:

$$4)\quad a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = d : d_1$$

oder in Bruchform:

$$5)\quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} .$$

Die Proportion unter 4) umfaßt die sämtlichen Proportionen unter 1) und 2), sowie die gleichen Quotienten unter 5). Sie ist aus mehreren gleichen Verhältnissen zusammengesetzt und führt den Namen **fortlaufende Proportion.** In der Regel bedient man sich zur Darstellung dieser Proportion folgender kürzeren Schreibart:

$$6)\quad a : b : c : d = a_1 : b_1 : c_1 : d_1 ,$$

gelesen: a (verhält sich) zu b zu c zu d wie a_1 zu b_1 zu c_1 zu d_1. Jede Seite dieser Proportionsart nennt man ein fortlaufendes Verhältnis. Die Zahlen links vom Gleichheitszeichen sind, wie die Proportion unter 4) deutlich zeigt, die **Vorderglieder**, die andern die **Hinterglieder**. Aus der Entstehung der fortlaufenden Proportion 6) bezw. aus 4) ergiebt sich z. B.:

$$a : c = a_1 : c_1 \quad \text{oder} \quad b : d = b_1 : d_1 , \qquad \text{d. h.:}$$

1) **Lehrsatz: Zwei beliebige Vorderglieder verhalten sich wie die gleichstelligen Hinterglieder.**

Es ist ferner:

$$a : b : c : d = na_1 : nb_1 : nc_1 : nd_1 , \quad \text{in Worten:}$$

2) **Lehrsatz: Jede fortlaufende Proportion bleibt richtig, wenn man sämtliche Hinterglieder (oder auch alle Vorderglieder) mit derselben Zahl multipliziert oder durch die nämliche Zahl dividiert.** (Vergl. § 73, 1.)

Der 4) Lehrsatz § 74 gilt auch für die fortlaufende Proportion. Wir wollen diese Wahrheit zunächst an einem bestimmten Beispiele nachweisen. Es sei die Proportion:

$$5 : 3 = 10 : 6 = 15 : 9, \quad \text{Exponent } \tfrac{5}{3}$$

oder

$$5 : 10 : 15 = 3 : 6 : 9$$

gegeben.

Man hat:

$$5 + 10 + 15 : 3 + 6 + 9 = 5 : 3$$

$$30 : 18 = 5 : 3 .$$

Ist allgemein die fortlaufende Proportion:

$$a : b : c : d = a_1 : b_1 : c_1 : d_1$$

gegeben, so schreibe man dieselbe in der Form unter 4) oben und setze den Exponenten $a : a_1 = t$, so entstehen folgende Gleichungen:

$$1) \quad \begin{cases} a = a_1 \cdot t \\ b = b_1 \cdot t \\ c = c_1 \cdot t \\ d = d_1 \cdot t . \end{cases}$$

Verbindet man dieselben durch $\pm$, so entsteht:

$$2) \quad a \pm b \pm c \pm d = (a_1 \pm b_1 \pm c_1 \pm d_1) \cdot t,$$

folglich:

$$3) \quad a \pm b \pm c \pm d : a_1 \pm b_1 \pm c_1 \pm d_1 = t = a : a_1,$$

d. h.:

3) **Lehrsatz:** *In jeder fortlaufenden Proportion verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe sämtlicher Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.*

In der vorstehenden Formel können die Vorzeichen beliebig gewählt werden, wenn man nur beachtet, daß die gleichstelligen Glieder dasselbe Vorzeichen erhalten. Die Proportion bleibt auch richtig, wenn man die entsprechenden Glieder mit der=

selben Zahl multipliziert. (Man vergleiche § 74, 4) Lehrsatz.) Allgemein ist:

$$\frac{na \pm mb \pm pc \pm qd}{na_1 \pm mb_1 \pm pc_1 \pm qd_1} = \frac{a}{a_1}.$$

Zusatz: Sind beliebig viele gleiche Brüche gegeben, so hat ein Bruch, dessen Zähler gleich der Summe der Zähler und dessen Nenner der Summe der Nenner jener Brüche gleich ist, den Wert eines gegebenen Bruches. So ist z. B.:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{15}{20} = \frac{3+6+9+15}{4+8+12+20} = \frac{33}{44} = \frac{3}{4}.$$

Anmerkung. Für die Auflösung der Bestimmungsgleichungen merke man sich die aus der Proportion:

$$a : b : c : d = a_1 : b_1 : c_1 : d_1$$

sofort hervorgehenden Gleichungen unter 1): $a = a_1 \cdot t$, u. s. w. So ergiebt sich z. B. aus der Proportion $x : y : z = a : b : c$ direkt:

$$x = a \cdot t, \quad y = b \cdot t \quad \text{und} \quad z = c \cdot t.$$

§ 77. Bildung fortlaufender Proportionen.

Aufgabe: Die fortlaufende Proportion zwischen n Zahlen zu bilden, wenn $n-1$ voneinander unabhängige Proportionen gegeben sind.

Beispiel 1): Es seien zwischen den 6 Ausdrücken a, b, c, d, e und f die folgenden Proportionen gegeben:

1) $a : d = 4 : 5$
2) $f : e = 3 : 8$
3) $b : c = 2 : 3$
4) $d : f = 7 : 4$
5) $e : b = 8 : 5$.

Da keine der vorstehenden Proportionen aus andern abgeleitet werden kann, so heißen sie unabhängig voneinander. Um die gesuchte Proportion zu erhalten, setze man nach § 75 aus den gegebenen Proportionen zunächst solche zusammen, in welchen das Verhältnis einer Größe zu allen übrigen vor-

kommt. Man bilde z. B. zunächst 5 Proportionen mit je einem der Verhältnisse

$$a:b,\quad a:c,\quad a:d,\quad a:e \text{ und } a:f.$$

$$\begin{array}{rl} \text{I)} & a:d = 4:5 \\ 4) & \underline{d:f = 7:4} \\ \text{II)} & a:f = 7:5. \\ 2) & \underline{f:e = 3:8} \\ \text{III)} & a:e = 21:40. \\ 5) & \underline{e:b = 8:5} \\ \text{IV)} & a:b = 21:25. \\ 3) & \underline{b:c = 2:3} \\ \text{V)} & a:c = 14:25. \end{array}$$

Nun stellen wir die unter I) bis V) stehenden Proportionen zusammen:

$$\begin{aligned} a:b &= 21:25 \\ a:c &= 14:25 \\ a:d &= 4:5 \\ a:e &= 21:40 \\ a:f &= 7:5. \end{aligned}$$

Macht man durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren die Vorderglieder rechts gleich (§ 73, 1) Lehrsatz a), so entsteht:

$$\begin{aligned} a:b &= 84:100 \\ a:c &= 84:150 \\ a:d &= 84:105 \\ a:e &= 84:160 \\ a:f &= 84:60. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich die fortlaufende Proportion:

$$a:b:c:d:e:f = 84:100:150:105:160:60.$$

Beispiel 2): Gegeben seien die Proportionen:

$$\begin{aligned} 1)\quad & a:b=1:\ 2\\ 2)\quad & c:e=3:\ 4\\ 3)\quad & b:f=5:\ 6\\ 4)\quad & f:e=3:\ 8\\ 5)\quad & d:c=7:12. \end{aligned}$$

Anderes Verfahren: Man drücke die n gegebenen Größen durch eine beliebige derselben, z. B. a, aus. Bezeichnet man die gesuchten Koeffizienten mit z, z_1, z_2 u. s. w., so sind hier folgende Gleichungen zu bilden:

$$a=1\cdot a,\quad b=z\cdot a,\quad c=z_1\cdot a,\quad d=z_2\cdot a,$$
$$e=z_3\cdot a,\quad f=z_4\cdot a.$$

Es ist zufolge Proportion:

$$\begin{aligned} 1)\quad & \begin{cases} a=1\cdot a\\ b=2\cdot a\end{cases}\\ 3)\quad & f=\tfrac{6}{5}\cdot 2\cdot a=\tfrac{12}{5}a\\ 4)\quad & e=\tfrac{8}{3}\cdot\tfrac{12}{5}\cdot a=\tfrac{32}{5}a\\ 2)\quad & c=\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{32}{5}\cdot a=\tfrac{24}{5}a\\ 5)\quad & d=\tfrac{7}{12}\cdot\tfrac{24}{5}\cdot a=\tfrac{14}{5}a. \end{aligned}$$

Aus vorstehenden Gleichungen ergiebt sich als die gesuchte fortlaufende Proportion:

$$a:b:c:d:e:f=1:2:\tfrac{24}{5}:\tfrac{14}{5}:\tfrac{32}{5}:\tfrac{12}{5}.$$

Oder, wenn man alle Hinterglieder mit 5 multipliziert (2. Lehrsatz):

$$a:b:c:d:e:f=5:10:24:14:32:12.$$

Beim praktischen Rechnen kann man dies Verfahren in folgender kürzeren Weise anwenden. Man schreibe die Ausdrücke, welche die Vorderglieder der gesuchten Proportion bilden, nebeneinander, setze über den Buchstaben, mit welchem die übrigen verglichen werden sollen, z. B. über a eine Verhältniszahl, etwa 1, bilde wie vorhin die Verhältniszahlen der andern Buchstaben mit Beziehung auf a (im Kopfe) und setze die

erhaltenen Werte über die bezüglichen Größen. Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen.

Beispiel 3): Gegeben sei:

$$x : z = 4 : 5$$
$$y : v = 8 : 7$$
$$z : u = 3 : 2$$
$$v : x = 7 : 12.$$

Auflösung:

$$\begin{matrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} \\ x, & y, & z, & u, & v. \end{matrix}$$

$$x : y : z : u : v = 1 : \tfrac{2}{3} : \tfrac{5}{4} : \tfrac{5}{6} : \tfrac{7}{12}.$$

Sämtliche Hinterglieder mit 12 multipliziert, liefert:

$$x : y : z : u : v = 12 : 8 : 15 : 10 : 7.$$

Beispiel 4): Gegeben:

$$a : c = 12 : 7$$
$$f : g = 5 : 9$$
$$d : b = 16 : 5$$
$$g : c = 18 : 7$$
$$d : f = 8 : 5.$$

Auflösung:

$$\begin{matrix} 1 & \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & \frac{4}{3} & \frac{5}{6} & \frac{3}{2} \\ a, & b, & c, & d, & f, & g. \end{matrix}$$

Proportion:

$$a : b : c : d : f : g = 12 : 5 : 7 : 16 : 10 : 18.$$

§ 78. **Harmonische Proportionen.**

Erklärung: Wenn drei verschiedene Zahlen $a > b > c$ die Eigenschaft erfüllen, daß die Differenz der ersten und zweiten sich zur Differenz der zweiten und dritten verhält wie die erste zur dritten Zahl, so sagt man, die gegebenen Zahlen stehen in „**harmonischer Proportion**“.

So z. B. bilden die Zahlen 12, 12 und 10 die harmonische Proportion:

$$15 - 12 : 12 - 10 = 15 : 10.$$

Ferner heißen die Zahlen 30, 24 und 20 harmonisch proportional, weil:

$$30 - 24 : 24 - 20 = 30 : 20.$$

Allgemein bilden die Zahlen a, b, c eine harmonische Proportion, wenn:

$$a - b : b - c = a : c.$$

Man nennt die Zahlgröße b die „mittlere harmonische Proportionale" oder das „harmonische Mittel" der Zahlen a und c. Die Proportion:

$$a - x : x - b = a : b$$

heißt eine stetige harmonische zwischen a, x und b und x ist das harmonische Mittel von a und b. Diese Proportionsart führt den Namen harmonische, wegen der Beziehung ihrer Zahlen zur Harmonie der musikalischen Töne. Die Saitenlängen, welche die Töne des Akkordes: Grundton, kleine Terz, Quinte und Oktave hervorbringen, stehen in dem Verhältnisse $1 : \frac{4}{5} : \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$; mithin bilden die Saitenlängen der Töne des Durdreiklangs das Verhältnis $1 : \frac{4}{5} : \frac{2}{3}$, welches mit dem Verhältnis obiger Zahlen, nämlich $15 : 12 : 10$, gleichwertig ist. Ferner ist das geometrische Verhältnis $6 : 4 : 3$ mit dem Verhältnis der Saitenlängen für die Erzeugung von Grundton, kleine Terz und Oktave übereinstimmend. Wenn man in einer harmonischen Proportion die Glieder des zweiten Verhältnisses vertauscht, so heißt diese Proportion eine kontraharmonische, z. B.:

$$a - b : b - c = c : a.$$

Bildung des harmonischen Mittels. Um das harmonische Mittel zweier Zahlen a und b durch Rechnung zu finden, bilde man die stetige Proportion:

$$a - x : x - b = a : b.$$

Hieraus folgt nach dem Hauptgesetz (§ 72) die Produktengleichung:

$$(a - x)b = (x - b)a \qquad \text{oder}$$
$$ab - bx = ax - ab;$$
$$x(a - b) = 2ab;$$

mithin:
$$x = \frac{2ab}{a + b}, \qquad \text{in Worten:}$$

1) **Lehrsatz:** Das harmonische Mittel zweier Zahlen a und b ist gleich dem doppelten Produkt beider Zahlen dividiert durch ihre Summe.

Aus der Gleichung $x = \frac{2ab}{a + b}$ lassen sich leicht die folgenden ableiten:

$$\frac{x}{2} = \frac{ab}{a + b}, \qquad \frac{2}{x} = \frac{a + b}{2ab},$$
$$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

oder in gebräuchlicherer Form:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{b}, \qquad \text{d. h.:}$$

2) **Lehrsatz:** Der umgekehrte Wert des harmonischen Mittels zweier Zahlen a und b ist gleich dem arithmetischen Mittel der reciproken Werte dieser beiden Zahlen.

Zusatz: Das geometrische Mittel der Zahlen a und b ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel derselben Zahlen.

In Zeichen:
$$\frac{1}{2}(a + b) : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : \frac{2ab}{a + b}.$$

Die Zahlen a, b und c stehen

in arithmetischer Proportion, wenn:
$$a - b = b - c,$$
in geometrischer Proportion, wenn:
$$a - b : b - c = a : b,$$
in harmonischer Proportion, wenn:
$$a - b : b - c = a : c \qquad \text{ist.}$$

Geschichtliche Bemerkung. Die drei Arten stetiger Proportionen, der arithmetischen, geometrischen und harmonischen, waren schon in der Schule der Pythagoreer bekannt, in welcher die Proportionen überhaupt eine hervorragende Rolle spielten. Der Pythagoreer Archytas von Tarent spricht ausdrücklich vom arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel, und er erklärt die beiden ersteren in der heute üblichen Weise. Dann fährt er fort: In einem harmonischen Verhältnisse übersteigt das erste Glied a das zweite b um denselben Teil seiner selbst, $\frac{a}{n}$, wie dieses mittlere Glied das dritte c um denselben Teil des letzteren, also um $\frac{c}{n}$. In Zeichen: Die Zahl b ist harmonisches Mittel zwischen a und c, wenn:

$$1)\quad a = b + \frac{a}{n} \qquad \text{und} \qquad 2)\quad b = c + \frac{c}{n}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man die harmonische Proportion zwischen a, b und c leicht ableiten. Man hat nämlich aus:

$$1):\quad a - b = a : n \qquad \text{und aus} \qquad 2):\quad b - c = c : n.$$

Durch Division dieser Gleichungen entsteht:

$$a - b : b - c = a : c.$$

Die Proportion:

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b \quad (\text{z. B.}\quad 6 : 9 = 8 : 12)$$

war nach Ansicht des Pythagoras die vollkommenste und sie wurde die „musikalische Proportion" genannt. Nach Jamblichus („Introductio in Nikomachi arithmeticam", Arnheim 1688) ist die musikalische Proportion in Babylon erfunden und von Pythagoras den Griechen übermittelt worden, was aber natürlich wenig glaublich ist.

Anwendung der Proportionslehre auf die bürgerlichen Rechnungsarten.

§ 79. Einführung in die Anwendung der Proportionen auf Größen.

1) Die vorhergehenden Lehrsätze über geometrische Proportionen gelten zunächst für Proportionen aus reinen Zahlen. Wir wollen nun die wichtigsten Anwendungen der Proportionen in der allgemeinen Größenlehre behandeln. In der Einleitung ist unter 1) bereits die Größe erklärt worden. Zufolge dieser Definition können alle Größen gemessen und durch benannte

Zahlen ausgedrückt werden. Eine benannte Zahl, z. B. 5 m, umfaßt zwei Stücke, nämlich die Maßeinheit, womit dieselbe gemessen ist und die reine Zahl, die Maßzahl, welche das Ergebnis der Messung bezeichnet (§ 65). Um stetige Größen überhaupt, z. B. Raum-, Zeit-, Kraft- und Massengrößen, den arithmetischen Gesetzen unterwerfen zu können, ist vor allem nötig, die Größen durch benannte Zahlen zu bezeichnen. So muß man z. B. Linien durch Vielfache eines Längenmaßes, Flächen durch Vielfache einer Flächeneinheit ausdrücken. In den folgenden Erörterungen drücken die kleinen lateinischen Buchstaben reine Zahlen aus, während die großen Buchstaben A, B u. s. w. Größen darstellen.

Größen heißen gleichartig, wenn sie entweder schon durch dieselbe Maßeinheit gemessen sind, oder sich auf gleiche Benennung zurückführen lassen. Im ersteren Falle werden die Größen auch häufig gleichbenannte oder gleichnamige genannt. So z. B. sind die Zeitgrößen 3 Jahre und 60 Monate, die Münzen 10 ℳ und 8 Frs. gleichartige, 4 ℳ und 10 ℳ sind auch gleichnamige Größen.

Grundgesetz: Um das geometrische Verhältnis zweier gleichartigen Größen zu finden, mißt man beide durch ein gemeinsames Maß. Die Größen verhalten sich alsdann wie ihre gleichnamigen Maßzahlen.

Ist z. B. die Flächeneinheit 1 qcm in dem Rechteck R_1 $a$mal, in dem Rechteck R_2 $b$mal enthalten, also:

$$R_1 = a \cdot 1\,\text{qcm} \quad \text{und} \quad R_2 = b \cdot 1\,\text{qcm},$$

so muß:

$$R_1 : R_2 = a : b$$

sein. Mißt man zwei gleichartige Größen A und B durch dieselbe Einheit E und erhält:

$$A = n \cdot E \quad \text{und} \quad B = m \cdot E,$$

so ist stets:

$$A : B = n \cdot E : m \cdot E = m : n.$$

Das geometrische Verhältnis zweier gleichartigen Größen A und B ist demnach das Ergebnis ihrer Vergleichung mittels der gleichnamigen Maßzahlen der Größen. (Vergleiche § 69.) Der Wert dieses Verhältnisses

bleibt für alle Maßeinheiten der Größen derselbe, mit anderen Worten: das Verhältnis zweier Größen ist von der gewählten Maßeinheit durchaus unabhängig. Nimmt man z. B. die Maßeinheit $E_1 = qE$, so ist im vorigen Beispiel:

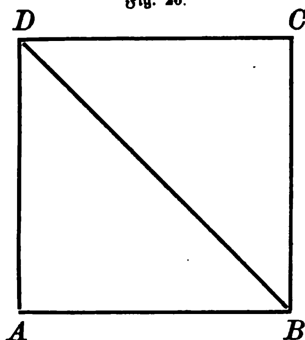
$$A = nqE \quad \text{und} \quad B = mqE;$$

folglich:

$$A : B = nqE : mqE = nq : mq = n : m \qquad (\S\ 69).$$

2) Irrationale Verhältnisse. Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, daß die Maßzahlen zweier gleichartigen Größen sich stets durch eine der uns bis jetzt bekannten Zahlformen, nämlich der ganzen natürlichen Zahl oder einen gewöhnlichen oder zehnteiligen Bruch angeben lassen. In der Raumlehre kommen aber häufig Größen vor, welche durch die Messung keine dieser Zahlformen als Maßzahl ergeben. Ein einfaches Beispiel für das Vorhandensein solcher Größen bietet unter den Strecken die geometrische Vergleichung der Diagonale eines Quadrates mit seiner Seite. Man findet die Maßzahl der Diagonale inbezug auf eine Quadratseite arithmetisch auf folgendem einfachen Wege. Nach dem pythagoreischen Lehrsatze ist:

Fig. 26.



$$\overline{BD}^2 = 2 \cdot \overline{AB}^2; \quad \text{mithin}$$

$$BD = \sqrt{2} \cdot AB \quad \text{oder}$$

$$AB : BD = 1 : \sqrt{2}.$$

Wendet man hier zur Ermittelung der Maßzahl für die Diagonale inbezug auf das Maß AB das in § 65 unter 4) erläuterte Verfahren an, so bleibt stets ein Rest übrig, man mag die Messung mittels Abtragen so lange fortsetzen, als man will. Mithin kann die Strecke AD weder durch AB selbst noch durch einen Bruchteil des Maßes genau meßbar sein. Zieht man aus 2 die Quadratwurzel, so erhält man einen unendlichen unperiodischen Dezimalbruch $1{,}4142 \cdots$, welchen

man **Irrationalzahl***) nennt. Ist die Maßzahl einer Größe A inbezug auf eine andere B eine Irrationalzahl, so nennt man das Verhältnis der Größen ein **irrationales** und die Größen selbst **inkommensurable**. Dagegen heißen die Größen, welche ganze oder Bruch-Zahlen als Maßzahlen haben, **kommensurable** Größen, und ihr Verhältnis wird ein **rationales** genannt. Da auch inkommensurable Größen eine Vergleichung fordern und die arithmetischen Begriffe möglichst allgemeine Geltung verlangen, so müssen wir nun den Begriff „**Verhältnis**" erweitern und ihn auf inkommensurable Größen ausdehnen. Zu dem Ende ersetzt man die Wurzelform der Maßzahl durch eine numerische Zahl, meist in Form eines Dezimalbruches, der dem wahren Werte der Irrationalzahl so nahe liegt, daß der Fehler, als verschwindend klein, gleich Null betrachtet werden kann. Man kann nämlich jede Irrationalzahl in zwei Grenzen einschließen, die geschlossene Brüche darstellen, und diese Grenzen beliebig nahe aneinander rücken, so daß die Differenz der Grenzwerte immer kleiner wird und sich unaufhörlich der Null nähert. So liegt z. B. der Wert von $\sqrt{2}$ zwischen $1{,}41421\cdots$ und $1{,}41422$, welche Grenzwerte nur um $\frac{1}{100\,000}$ abweichen, und es muß das Verhältnis $1:\sqrt{2}$ von jeder derselben um weniger als $0{,}00001$ verschieden sein; daher setzt man $\sqrt{2} = 1{,}41421\cdots\cdot$ Da die Lehrsätze der Arithmetik **allgemeine** Gültigkeit haben, so unterliegen die **irrationalen Verhältnisse** allen Gesetzen über rationale Verhältnisse. Man setzt irrationale Verhältnisse gleich, wenn sie stets zwischen denselben Grenzen liegen.

3) Wenn zwei gleichartige Größen A' und B in einer solchen Beziehung zu einander stehen, daß das $n$fache der einen dem $m$fachen der andern gleich, also $An = Bm$ ist, so besteht die Proportion:

$$A : B = m : n,$$

so z. B. folgt aus den Wertgleichungen $4\,\mathcal{M} = 5$ Frs. und $1\,\text{hl} = \frac{8}{11}$ Ohm:

*) Die irrationalen Zahlen kommen besonders in der Wurzelrechnung vor. Näheres über diese Zahlen bringt der sechste Abschnitt.

$$1 \mathcal{M} : 1 \text{ Frs.} = 5 : 4,$$

$$1 \text{ hl} : 1 \text{ Ohm} = 8 : 11.$$

Zwischen Größen können drei Arten von einfachen Proportionen bestehen:

a) die Glieder eines Verhältnisses sind gleichbenannte, die des andern reine Zahlen, z. B.:

$$a \text{ kg} : b \text{ kg} = c : x,$$

b) sämtliche Glieder der Proportion haben gleiche Benennung, z. B.:

$$a \text{ qm} : b \text{ qm} = c \text{ qm} : x \text{ qm}.$$

c) die Glieder je eines Verhältnisses sind gleichnamig, z. B.:

$$a \text{ hl} : b \text{ hl} = c \mathcal{M} : x \mathcal{M}.$$

Eine Proportion, deren Glieder sämtlich Größen (benannte Zahlen) sind, führt den Namen „Größenproportion". Nach § 75 kann jede Größenproportion durch die Zahlenproportion aus den gleichnamigen Maßzahlen je zweier gleichartigen Größen ersetzt werden. Stehen zwei Größen A und A_1 im Verhältnisse $a : b$, und verhalten sich zwei andere B und B_1 wie $a_1 : b_1$, so bildet man unter der Bedingung, daß beide Verhältnisse gleich sind, die allgemeine Größenproportion:

$$1) \quad A : A_1 = B : B_1,$$

welche sich mit:

$$2) \quad a : b = a_1 : b_1$$

völlig deckt; denn das geometrische Verhältnis zweier gleichartigen Größen ist stets dem Verhältnisse ihrer gleichnamigen Maßzahlen gleich (§ 79, 1). Versteht man unter der Größenproportion unter 1) die reine Zahlenproportion unter 2), so finden natürlich alle Gesetze über Zahlenproportionen auf 1) Anwendung. Im praktischen Rechnen wird man in allen drei eben unterschiedenen Fällen durchgängig die reine Zahlenproportion zum Operieren benutzen. Will man die allgemeine Größenproportion den Gesetzen über Zahlenproportionen unter-

werfen, so muß man sich statt der Größen die Maßzahlen derselben denken. Auf die Größenproportion selbst kann das Hauptgesetz § 76 nicht angewendet werden, weil Produkte aus Größen arithmetisch unzulässig sind. Andere Lehrsätze über Zahlenproportionen haben nur für solche Größenproportionen Geltung, deren Glieder sämtlich gleichartig sind. So ist z. B. die aus der richtigen Proportion:

$$5\,\mathrm{m} : 12\,\mathrm{m} = 10\,\mathcal{M} : 24\,\mathcal{M}$$

abgeleitete:

$$5\,\mathrm{m} : 10\,\mathcal{M} = 12\,\mathrm{m} : 24\,\mathcal{M}$$

ungereimt, weil Verhältnisse zwischen ungleichartigen Größen keinen Sinn haben.

§ 80. **Fortsetzung: gerades und umgekehrtes Verhältnis.**

Stehen zwei ungleichartige veränderliche Größen A und B in einer solchen Beziehung zu einander, daß mit einer Änderung (Wachsen, Abnehmen) der einen Größe gleichzeitig eine Änderung der andern Größe verknüpft ist, so sagt man: die Größen sind abhängig voneinander. So z. B. sind Gewichte von Waren und die zugehörigen Preise, Kräfte und Wirkungen voneinander abhängige Größen. Die Abhängigkeit zweier veränderlichen Größen kann eine vielfache sein. Wenn eine Multiplikation oder Division der einen Größe A dieselbe arithmetische Veränderung der andern B bedingt, so stehen die Größen in geradem oder direktem Verhältnisse. Wird aus B die Größe $B_1 = n \cdot B$, wenn A in $A_1 = n \cdot A$ übergeht, so besteht die Proportion:

$$A : A_1 = B : B_1 \quad \text{z. B.:} \quad 3\,\mathrm{m} : 8\,\mathrm{m} = 6\,\mathcal{M} : 16\,\mathcal{M},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$A : nA = B : nB \quad \text{oder} \quad A : \frac{A}{n} = B : \frac{B}{n}.$$

Hat hingegen eine Multiplikation von A mit einer Zahl n die Division der Größe B durch n zur Folge, so sagt man: die Größen stehen im umgekehrten oder indirekten Verhältnisse. Wenn z. B. 2 Arbeiter einen Acker von bestimmter

Größe in 3 Tagen umgraben, so müßte 1 Arbeiter zu demselben Werke $2 \cdot 3$ Tage brauchen. Steht eine Größenart B und B_1 zu einer andern A und A_1 im umgekehrten Verhältnis, so hat man die Proportion:

$$A : A_1 = B_1 : B$$

oder $$A : A_1 = \frac{1}{B} : \frac{1}{B_1}.$$

In beiden Fällen heißen A und B proportionale Größen, und zwar im ersten Falle gerade (direkt), im zweiten dagegen umgekehrt (indirekt) proportional.

A) Größen, die in geradem Verhältnisse zu einander stehen, sind:

1) das Gewicht einer Ware und ihr Preis;
2) die Anzahl der Stücke und der Preis eines Stückes;
3) Höhe der Einlage (Kapital) und Anteil am Gewinne;
4) Geschwindigkeit und durchlaufener Weg;
5) die Inhalte von Flächen und Körpern bei gleicher Grundseite, bezw. Grundfläche und verschiedenen Höhen;
6) die Anzahl der Arbeiter und die Leistungen;
7) die Anzahl der Arbeiter und der Arbeitslohn;
8) Arbeitszeit und Arbeitslohn;
9) Kapital und Zinsen; Zinsfuß und Zinsen; Zeit und Zinsen;
10) allgemein: die Intensität einer Kraft und ihre Wirkungen; die Zeitdauer einer wirkenden Kraft und die Größe der Wirkung.

B) Zu den Größen, die umgekehrt proportional sind, gehören:

1) die Anzahl der Arbeiter und die zu einem bestimmten Werk erforderliche Arbeitszeit;
2) die Anzahl der Verzehrer und die Zeit, in welcher ein bestimmter Vorrat verbraucht wird;
3) die Anzahl der Verzehrer und die Quantität für jede Person bei einer bestimmten Menge Lebensmittel;

4) Getreidepreis und Gewicht eines immer in demselben Preise bleibenden Backwerks;
5) die Anzahl der Kleidungsstücke und die für das einzelne Stück zu verwendende Stoffmenge;
6) Grundseite und Höhe von Parallelogrammen und Dreiecken bei gleich großen Flächenräumen;
7) Kapital und Zeit, Kapital und Zinsfuß, Zeit und Zinsfuß bei gleichen Zinsen;
8) der Divisor und der Quotient;
9) der Umfang eines Rades und die Anzahl der Umläufe bei gleicher Wegstrecke;
10) die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers und die Zeit bei gleicher Entfernung.

Beim Ansetzen einer Proportion muß der Rechner **beurteilen**, ob die in einer Aufgabe vorkommenden Größen gerade oder umgekehrt proportional sind. Die Art des Verhältnisses erkennt man leicht durch die Prüfung mittels der Redewendungen je mehr — desto mehr (gerade); je mehr — desto weniger, ꝛc. (umgekehrtes Verhältnis); folgt auf beide Bindewörter eine Steigerung, so stehen die Größen in geradem Verhältnis, in jedem andern Falle liegt ein umgekehrtes Verhältnis vor.

Anwendung der Proportionen auf Aufgaben der Regel de tri.

Sind zwei ungleichartige, veränderliche Größen A und B proportional, und geht eine derselben in eine größere oder kleinere (derselben Art) über, so kann man die Größe x berechnen, in welche die andere übergehen muß. Aufgaben dieser Art sind die aus dem Rechnen bekannten Aufgaben der Regel de tri oder des Dreisatzes.*)

Beispiel 1): Ein Arbeiter verdient in $a = 16$ Tagen so viel als ein anderer in $b = 20$ Tagen. Wenn nun der Verdienst des ersteren wöchentlich $c = 15$ ℳ beträgt, welches ist dann der Wochenlohn des letzteren?

*) Von neueren Rechenlehrern mit Vorliebe „die einfache Schlußrechnung“ genannt.

Auflösung: Die Leistungen der Arbeiter und mithin auch ihre Löhne verhalten sich bei gleichen Zeiten umgekehrt wie die Größen 16 Tage und 20 Tage. Man hat daher die Größenproportion:

$$20 \text{ Tg.} : 16 \text{ Tg.} = 15 \mathcal{M} : x \mathcal{M}.$$

Hieraus folgt: $20 : 16 = 15 : x,$

mithin: $x = \frac{16 \cdot 15}{20} = 12 (\mathcal{M}).$

Beispiel 2): Wenn 17 cbm Birkenholz so viel Hitzkraft als 20 cbm Buchenholz haben und 1 cbm Birkenholz 9,50 ℳ kostet, wie viel ist dann 1 cbm Buchenholz wert?

Auflösung: Aus der ersten Angabe der Aufgabe folgt, daß die Hitzkraft des Birkenholzes sich zur Hitzkraft des Buchenholzes wie 20 : 17 verhält. Man hat also die Proportion:

$$20 : 17 = 9{,}50 \mathcal{M} : x \mathcal{M},$$

mithin: $x = \frac{17 \cdot 9{,}50}{20} = 7{,}175 (\mathcal{M}).$

Beispiel 3): Wenn ein Maurer bei gleichem Fleiße bei Fundamentmauern täglich 500, bei Gewölbemauern dagegen nur 320 Steine legt, und 1 cbm des ersten Mauerwerks 2 ℳ an Arbeitslohn kommt, was kostet dann 1 cbm Gewölbemauer?

Auflösung: $500 : 320 = x : 2.$

$$x = \frac{500 \cdot 2}{320} = \frac{25}{8} = 3{,}125 (\mathcal{M}).$$

§ 81. Zusammengesetzte Verhältnisse.

1) Begriff. Die Inhalte zweier Rechtecke verhalten sich in einer Hinsicht wie ihre Grundseiten und in einer andern wie ihre Höhen. Angenommen, ein Rechteck R habe eine Grundseite von $g = 3$ cm und eine Höhe von $h = 2$ cm; die Ausdehnungen eines andern Rechtecks R_1 seien $g_1 = 7$ cm und $h_1 = 5$ cm. Alsdann verhält sich:

$R : R_1$ in einer Beziehung wie $2 : 7$, allgemein wie $g : g_1$,
in einer andern Beziehung wie $3 : 5$, allgemein wie $h : h_1$.

Die Werte der Größen R und R_1 sind also von zwei andern Größen, bezw. von den Maßzahlen derselben, **abhängig**. Man sagt daher: das Verhältnis $R:R_1$ steht mit den Größen G und G_1, H und H_1 (den Grundseiten und Höhen) im **zusammengesetzten** Verhältnisse.

Um den **Wert** des Verhältnisses $R:R_1$ durch Rechnung zu finden, zeichne man ein Hilfsrechteck R_2, das mit R in der Höhe, und mit R_1 in der Grundseite übereinstimmt. Rechtecke von gleicher Grundseite (Höhe) verhalten sich wie ihre Höhen (Grundseiten), und man hat daher folgende Proportionen:

$$R : R_2 = 3 : 7$$
$$R_2 : R_1 = 2 : 5$$

mithin:
$$R : R_1 = 2 \cdot 3 : 5 \cdot 7;$$

allgemein:
$$R : R_2 = g : g_1$$
$$R_2 : R_1 = h : h_1$$

mithin:
$$R : R_1 = g \cdot h : g_1 \cdot h_1;$$

in Worten: Die Inhalte zweier Rechtecke verhalten sich wie die Produkte aus den gleichnamigen Maßzahlen ihrer Grundseiten und Höhen. Das Verhältnis der Inhalte der Rechtecke $R:R_1$ ist also aus den Verhältnissen ihrer Grundseiten $g:g_1$ und ihrer Höhen $h:h_1$ **zusammengesetzt**. Der durchlaufene Weg W eines bewegten Körpers ist von zwei Stücken **abhängig**, nämlich von der **Geschwindigkeit** g und der **Zeitdauer** t der Bewegung. Bezeichnet W_1 die Weglänge, welche von einem andern Körper in der Zeit t_1 mit der Geschwindigkeit g_1 zurückgelegt wird, so besteht die Proportion:

$$W : W_1 = t \cdot g : t_1 \cdot g_1,$$

d. h. die durcheilten Wege verhalten sich wie die Produkte aus den Zeiten und den Geschwindigkeiten; das Verhältnis $W:W_1$ ist also aus den Verhältnissen $g:g_1$ und $t:t_1$ **zusammengesetzt**.

Erklärung: Zwei gleichartige Größen A und A_1 stehen mit den Größenpaaren B und B_1, C und C_1 im **zusammen**-

gesetzten Verhältnisse, wenn $A : A_1$ gleich dem Produkt der Verhältnisse aus den Maßzahlen dieser Größenpaare, also:

$$A : A_1 = (B : B_1) \cdot (C : C_1) = \frac{B}{B_1} \cdot \frac{C}{C_1} \quad \text{ist.}$$

Für das Zusammensetzen von Größenproportionen gilt der folgende

Lehrsatz: Bezeichnen A, B, C gleichartige Größen und die Zeichen m, n, p, q, r und s ihre zugehörigen Maßzahlen, und hat man die Proportionen:

$$\begin{array}{lll} 1) & A : B & = m : n \\ 2) & B : C & = p : q \\ 3) & C : A_1 & = r : s \\ \hline \text{so ist:} \quad 4) & A : A_1 & = mpr : nqs. \end{array}$$

Da Größen mit Größen nicht multipliziert werden können, so kann der in § 75 für reine Zahlenproportionen geführte Beweis hier nicht benutzt werden. Um die Gültigkeit dieses Lehrsatzes für Größenproportionen selbständig darzuthun, kann man auf folgende Weise verfahren.

Aus den gegebenen Proportionen folgt:

$$A = \frac{m}{n} B; \quad B = \frac{p}{q} C; \quad C = \frac{r}{s} A_1.$$

Setzt man den Wert für C aus der letzten Gleichung in die zweite, so entsteht:

$$B = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} A_1.$$

Diesen Wert statt B in die erste Gleichung eingesetzt, giebt:

$$A = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} A_1;$$

folglich: $$A : A_1 = mpr : nqs.$$

Dies Verfahren, Größenproportionen zusammenzusetzen, hat stets Geltung, wenn das zweite Glied jeder Proportion mit dem ersten Gliede der nachfolgenden Proportion übereinstimmt. Übrigens kann man das in § 75 gelehrte Verfahren, Zahlenproportionen zusammenzusetzen, auch auf Größenproportionen

übertragen, wenn die großen Buchstaben als Maßzahlen der Größen aufgefaßt werden.

Der vorstehende wichtige Lehrsatz wird benutzt, um das Verhältnis zweier Größen mittels Einführung von Zwischengrößen (Hilfsgrößen) zu berechnen. Zur Erläuterung mögen noch folgende Beispiele dienen.

Aufgabe. Von zwei Äckern A und A_1 sei der erste 50 a, der zweite 75 a groß, der erstere liefere Weizen 2. Qualität, der zweite nur 5. Qualität, und der erstere trage so oft 15 ℳ Unkosten zur Bestellung als der andere 25 ℳ. Wie verhalten sich die Äcker hinsichtlich ihres Wertes?

Auflösung.

$A : A_1$ in der ersten Beziehung wie $50 : 75$,
in der zweiten Hinsicht wie $5 : 2$ (indirekt),
in der dritten Beziehung wie $25 : 15$ (indirekt).

Durch Einschaltung von Zwischengliedern, welche unter sich und mit den gegebenen Zahlen in einfachen Verhältnissen stehen, drücken wir das gesuchte Verhältnis $A : A_1$ in drei einfachen Verhältnissen aus. Dann erhalten wir folgende Proportionen:

$$A : B = 50 : 75$$
$$B : C = 5 : 2$$
$$C : A_1 = 25 : 15.$$

Hieraus folgt durch Zusammensetzen:

$$A : A_1 = \frac{50 \cdot 5 \cdot 25}{75 \cdot 2 \cdot 15} = 25 : 9.$$

Auch in der Geometrie macht man oft von obigem Lehrsatze Anwendung. Die Körperinhalte zweier rechtwinkeligen, geraden Prismen verhalten sich wie die Produkte aus den gleichnamigen Maßzahlen von Länge, Breite und Höhe, in Zeichen:
$$P : P_1 = a \cdot b \cdot c : a_1 \cdot b_1 \cdot c_1.$$

Um das Verhältnis $P : P_1$ zu finden, führt man ein Hilfsprisma P_2 ein, welches sowohl zu P als zu P_1 in einem bekannten einfachen Verhältnisse steht. Man hat:

$$P : P_2 = a \cdot b : a_1 \cdot b_1$$
$$P_2 : P_1 = c : c_1$$
$$P : P_1 = a \cdot b \cdot c : a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 .$$

Soll das Verhältnis zweier Dreiecke D und D_1 ermittelt werden, so denkt man sich ein Hilfsdreieck, das einerseits mit D und in einer andern Beziehung mit D_1 proportional ist. Ist etwa:

$$D : D_2 = g : g_1$$
$$D_2 : D_1 = h : h_1$$

so ist:

$$D : D_1 = g \cdot h : g_1 \cdot h_1 .$$

Hängen zwei Größen A und A_1 von zwei oder drei gleichen Verhältnissen ab, so stehen A und A_1 in direktem quadratischen oder im kubischen Verhältnisse. So z. B. verhalten sich die Inhalte zweier Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Durch- oder Halbmesser, in Zeichen:

$$K : K_1 = R^2 : r^2 .$$

Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren stehen im quadratischen Verhältnisse zweier gleichliegender Seiten. Der Wert der Diamanten und ihre Gewichte stehen ebenfalls im quadratischen Verhältnisse, es kostet z. B. ein Diamant von 4 Karat Gewicht 16mal so viel als ein solcher, der 1 Karat wiegt. In kubischem Verhältnisse stehen: Kante eines Würfels und sein Inhalt; der Durchmesser einer Kugel und ihr Inhalt.

Zusammengesetzte Verhältnisse kommen ferner in den Aufgaben der zusammengesetzten Regel de tri, des zusammengesetzten Dreisatzes*) und der Kettenregel vor.

Beispiel eines zusammengesetzten Dreisatzes. 18 Arbeiter können einen Graben von 50 m Länge, 3 m Breite und 2 m Tiefe in 64 Tagen zustande bringen. Wie viel Arbeiter sind unter gleichen Umständen nötig, um einen Graben, der 75 m lang, 4 m breit und $2\frac{1}{2}$ m tief ist, in 4 Monaten fertig zu stellen?

---

*) Statt dieser Bezeichnungen wird in neuerer Zeit mit Vorliebe der Name „zusammengesetzte Schlußrechnung" gebraucht. Dieser Ausdruck kommt übrigens schon in der „Arithmetik des Verkehrslebens" von L. Schmidt (1862) an mehreren Stellen vor.

Auflösung. Die gesuchte Anzahl Arbeiter ist von vier Größen abhängig, von der Länge, der Breite, der Tiefe des Grabens und der Arbeitszeit. Man stelle zunächst folgenden Ansatz auf:

50 m	Länge	3 m	Br.	2 m	Tiefe	64	Tg.	bed. 18	Arb.
75 m	"	4 m	"	$2\frac{1}{2}$ m	"	120	"	" x	"

Führt man die vier Größen der ersten Reihe durch Einführung der Zwischengrößen x_1, x_2 und x_3 nach und nach in die gleichartigen Größen der zweiten Reihe über, so entsteht:

50 m	Länge	3 m	Br.	2 m	Tiefe	64	Tg.	18	Arbeiter
75 m	"	3 m	"	2 m	"	64	"	x_1	"
75 m	"	4 m	"	2 m	"	64	"	x_2	"
75 m	"	4 m	"	$2\frac{1}{2}$ m	"	64	"	x_3	"
75 m	"	4 m	"	$2\frac{1}{2}$ m	"	120	"	x	"

Da nun je zwei aufeinander folgende Reihen nur in zwei Zahlengrößen verschieden sind, so erhält man die folgenden Proportionen:

$$18 : x_1 = 50 : 75$$
$$x_1 : x_2 = 3 : 4$$
$$x_2 : x_3 = 2 : 2\tfrac{1}{2}$$
$$x_3 : x = 120 : 64 \text{ (indirekt).}$$

Aus diesen Proportionen ergiebt sich durch Zusammensetzen:

$$18 : x = 50 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 120 : 75 \cdot 4 \cdot 2\tfrac{1}{2} \cdot 64;$$

mithin: $$x = \frac{18 \cdot 75 \cdot 4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 64}{50 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 120} = 24 \text{ (Arbeiter).}$$

Im praktischen Rechnen bedient man sich vielfach des folgenden kürzeren Ansatzes, der sogenannten Basedow'schen*) Regel:

*) Den Irrtum mehrerer Geschichtschreiber der Pädagogik, daß der berühmte Dessauer Pädagoge (1723—1790) nur ein „Halbgelehrter" gewesen sei, hat Prof. Günther in seiner Schrift: „Ein vergessenes Grundgesetz der Mechanik: das Kosinusgesetz von Basedow" berichtigt.

$$18 : x = \begin{cases} 50 : 75 \\ 3 : 4 \\ 2 : 2\tfrac{1}{2} \\ 120 : 64 \end{cases}$$

$$x = \frac{18 \cdot 75 \cdot 4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 64}{50 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 120} = 24.$$

Die **Kettenregel** gehört ebenfalls zu den zusammengesetzten Verhältnissen und dient dazu, mit Hilfe bekannter Verhältnisse die Wertgleichung oder das Verhältnis zwischen einer gegebenen und einer unbekannten Größe durch Rechnung zu finden. Weil die Größen in der gebräuchlichen Darstellung zur Berechnung der gesuchten Zahl gleichsam wie die Glieder einer Kette zusammenhängen, so führt die Rechnungsart den Namen „**Kettenregel**". Dieselbe gründet sich auf eine besondere Umformung der Verhältnisse mehrerer Größen.

Aufgabe 1): Wie viel ℳ ist ein Dollar wert, wenn sich verhält: 1 ℳ : 1 Frs. = 5 : 4, 1 Frs. : 1 Pfd. Sterling = 4 : 101 und 1 Pfd. Sterl. : 1 Dollar = 101 : 21?

Auflösung:

Verhält sich allgemein:	In vorliegender Aufgabe:
$A : B = m : n$	1 ℳ : 1 Frs. = 5 : 4
$B : C = p : q$	1 Frs. : 1 Pfd. Sterl. = 4 : 101
$C : D = r : s$	1 Pfd. Sterl. : 1 Doll. = 101 : 21

so bildet man die Wertgleichungen:

$nA = mB$	4 ℳ = 5 Frs.
$qB = pC$	101 Frs. = 4 Pfd. Sterl.
$sC = rD$	21 Pfd. Sterl. = 101 Dollar.
	1 Dollar = x ℳ.

Denkt man sich die gleichartigen Größen A, B, C, D durch dieselbe **Einheit** gemessen und unter den großen Buchstaben die **Maßzahlen** der Größen, so ergiebt sich durch Multiplikation vorstehender Gleichungen und durch Division der neuen Gleichung durch $B \cdot C$:

$$nqs \cdot A = mpr \cdot D,$$

folglich:

$$A = \frac{mpr}{nqs} \cdot D \qquad \text{und}$$

$$D = \frac{nqs}{mpr} \cdot A.$$

In der vorgelegten Aufgabe ist also:

$$x = \frac{4 \cdot 101 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 101} = 21 : 5 = 4{,}20\,(\mathcal{M}).$$

Beispiel 2):

1 holl. Gld. : 1 Pfd. Sterl. = 17 : 202
1 Pfd. Sterl. : 1 öster. Gld. = 202 : 20
1 öster. Gld. : 1 Francs = 5 : 2
1 Francs : 1 ℳ = 4 : 5.

Wie viel ℳ sind 10 holl. Gulden?

Auflösung: Verwandelt man die gegebenen Proportionen in Wertgleichungen und setzt 10 holl. Gld. = x ℳ, so erhält man:

x ℳ = 10 holl. Gld.
202 holl. Gld. = 17 Pfd. Sterl.
1 Pfd. Sterl. = 10,10 öster. Gld.
2 öster. Gld. = 5 Francs.
5 Francs = 4 ℳ.

$$x = \frac{10 \cdot 17 \cdot 10{,}10 \cdot 5 \cdot 4}{202 \cdot 2 \cdot 5} = 17\,(\mathcal{M}).$$

Um zu verhüten, daß der Kettensatz in gedankenlosen Mechanismus ausarte, muß derselbe so gelesen werden, daß der dem Ansatze zugrunde liegende Hauptschluß klar ausgedrückt wird.

Geschichtliche Anmerkung. Die Kettenregel findet sich in der Schrift von Adam Riese, „Rechnung auf der Linien und Federn", 1525. Um die Mitte des vorigen Jahrhunderts schrieb der Holländer van Rees über dieses Rechnungsverfahren, und nach ihm wird der Kettensatz auch die Reesische Regel genannt.

§ 82. Prozentrechnungen mit Berücksichtigung der Zeit.

A) Zinsrechnung. 1) In dieser bürgerlichen Rechnungsart kommen vier Größen inbetracht, das Kapital K, der Zinsfuß p, die Zeit t und die Zinsen z. Der Zinsfuß bezieht sich, wie aus dem Rechnen bekannt ist, stets auf 100 ℳ Kapital und 1 Jahr. Zur Berechnung der einjährigen Zinsen dient die Proportion:

$$100 : K = p : z.$$

Da die Zinsen eines Kapitals in geradem Verhältnisse zur Zeit stehen, also je 100 ℳ in t Jahren:

$$t \cdot p = pt \text{ ℳ}$$

Zinsen bringen, so hat man zur Berechnung der Zinsen für mehrere Jahre die Proportion:

$$100 : K = pt : z.$$

Hieraus folgt:

$$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}; \qquad p = \frac{100 \cdot z}{K \cdot t};$$

$$K = \frac{100 \cdot z}{p \cdot t}; \qquad t = \frac{100 \cdot z}{K \cdot p}.$$

Sind also von den in der Zinsrechnung vorkommenden Größen drei beliebige bekannt, so kann man die vierte stets mit Hilfe vorstehender Formeln direkt berechnen.

Beispiel. Wie viel Zinsen bringen 720 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ Prozent in 3 Jahren?

Ansatz: $100 : 720 = 3 \cdot 4\frac{1}{2} : x.$

$$x = \frac{720 \cdot 3 \cdot 4\frac{1}{2}}{100} = 97{,}20.$$

Aus der Gleichung für z, nämlich:

$$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100},$$

in welcher t die Anzahl der Jahre der Verzinsung bezeichnet, können noch besondere Formeln abgeleitet werden, welche als Grundlage einer bei Kaufleuten üblichen Art der Zinsberechnung in den sogenannten „**Conto correnten**“ dienen. Damit obige

Formel sich für bestimmte Werte für p vereinfachen läßt, rechnet man das Jahr in Deutschland zu 360 Tagen.*) Bezeichnet nun t die Anzahl der Tage der Verzinsung, so ist:

$$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}.$$

Setzt man $p = 3\frac{1}{3}$ Prozent, so wird $z = \frac{K \cdot t}{10800}$.

Ist $p = 4$ " " " $z = \frac{K \cdot t}{9000}$.

Wenn $p = 4\frac{1}{2}$ " " " $z = \frac{K \cdot t}{8000}$.

" $p = 5$ " " " $z = \frac{K \cdot t}{7200}$.

" $p = 6$ " " " $z = \frac{K \cdot t}{6000}$.

Das Produkt aus Kapital und der Anzahl der Zinstage heißt bei den Kaufleuten „Zinszahl" oder Nummer und die Zahlen 10800, 9000 u. s. w. werden „feststehende Divisoren" genannt. Wie lauten vorstehende besondere Formeln in Worten?

Beispiel. Wie viel Zinsen bringen 81 ℳ zu 4 Prozent in 234 Tagen?

Antwort:

$$\frac{81 \cdot 234}{9000} \mathcal{M} = \frac{9 \cdot 234}{1000} \mathcal{M} = 2{,}106 \mathcal{M}.$$

Es verhält sich offenbar:

$$1)\quad z : z_1 = K \cdot p \cdot t : K_1 \cdot p_1 \cdot t_1.$$

Wenn $t = t_1$, so ist:

$$2)\quad z : z_1 = K \cdot p : K_1 \cdot p_1.$$

Wenn $p = p_1$, so ist:

$$3)\quad z : z_1 = K \cdot t : K_1 \cdot t_1.$$

Ist $p = p_1$ und $t = t_1$, so hat man:

$$4)\quad z : z_1 = K : K_1.$$

---

*) In Großbritannien und Nordamerika rechnet man jeden Monat nach seinen Kalender- und das Jahr zu 365 Tagen.

Diese Formeln drücken arithmetische Wahrheiten über das Verhältnis der Zinsen verschiedener Kapitalien aus. So z. B. lautet Formel 3) in Worten: Die Zinsen verschiedener Kapitalien, die zu gleichem Zinsfuß ungleiche Zeiten ausstehen, verhalten sich wie die Produkte aus den Kapitalien und den zugehörigen Zeiten. Welche Gesetze sprechen die andern Formeln aus?

2) Berechnung eines durch einfache Verzinsung angewachsenen Kapitals. Soll die Summe K_1 berechnet werden, zu welcher ein Kapital K in einer gegebenen Zeit, t Jahren, zu p Prozent mit den Zinsen anwächst, so hat man die Proportion:

$$100 : 100 + pt = K : K_1 .$$

Hieraus folgt:

$$1)\quad K_1 = K \cdot \frac{100 + pt}{100} = K \cdot \left(1 + \frac{pt}{100}\right).$$

$$2)\quad K = K_1 \cdot \frac{100}{100 + pt}.$$

Beispiel. Ein zu 4 Prozent verzinstes Kapital wurde, nachdem es 2 Jahre ausgeliehen war, nebst den Zinsen mit 486 *M* zurückgezahlt. Wie groß war das Kapital?

Auflösung. Bezeichnet man das gesuchte Kapital mit x, so ist:

$$100 : 108 = x : 486,$$

mithin:

$$x = \frac{486 \cdot 100}{108} = 450.$$

B) Die kaufmännische Diskontrechnung. Der Diskont in 100 ist eine bei Kaufleuten übliche Vergütung für vor der Verfallszeit abgetragene unverzinsliche Kapitalien. Wird z. B. eine nach 3 Monaten fällige Warenrechnung im Betrage von 340 *M* mit 2 Prozent Diskont bar ausgezahlt, so werden an je 100 *M* Schuldsumme 2 *M* nachgelassen. Beträgt der Diskontfuß p Prozent, so heißt das: statt je 100 *M* Schuldsumme werden $100 - p$ *M* bar gezahlt. Der Diskontfuß bezieht sich (wie der Zinsfuß) stets auf die Zahl 100

und wird durchgängig für eine bestimmte Zeit festgesetzt, er ist also ein von der Zeit abhängiges Maß. Die Normalzeit für die Festsetzung des Diskontfußes ist im Warengeschäft verschieden, doch wird er meistens pro Monat, in einzelnen Fällen auch für die sogenannte Zielzeit (Zahlungsfrist) bestimmt.

Beispiel: Der Kaufmann A erhält eine Rechnung über bezogene Waren im Betrage von 580 *M*, Ziel 3 Monate; bei barer Zahlung $\frac{1}{2}$ Prozent Diskont pro Monat.

In Wechselgeschäften gilt der Diskontfuß vielfach für 1 Jahr. Hier hat der Diskont auch mehr die Eigenschaft voraus gezahlter Zinsen, besonders bei der Diskontierung von sogenannten Platzwechseln.

Die Begriffe Zinsfuß und Diskont werden manchmal miteinander verwechselt. 5 Prozent Zins und 5 Prozent Diskont sind zwar gleiche Quantitäten (insofern nämlich die Formeln für die Berechnung beider Größen übereinstimmen), aber verschiedene Qualitäten. Während der Zins eine Vergütung für die Nutzung eines Kapitals ist, die am Ende eines bestimmten Zeitraumes (in der Regel eines Jahres) dem Gläubiger zu gute kommt, bezeichnet Diskont den Wert einer Kapitalnutzung am Anfang eines Zeitabschnittes, die dem Schuldner zufällt. Für das Ergebnis der Vergütung ist, wie gesagt, diese Unterscheidung der beiden Begriffe insofern belanglos, als die Zins- und die Diskontformeln übereinstimmen.

Beispiel: Ein Wechsel über 750 *M*, welcher am 1. Dezember fällig war, wurde am 15. Juli mit 1 Prozent pro Monat diskontiert. Wie viel betrug der Diskont?

Auflösung: Der Diskontfuß beträgt für die Zeit der Vorauszahlung $4\frac{1}{2}$ Prozent. Man hat also die Proportion:

$$100 : 750 = 4\tfrac{1}{2} : x,$$

folglich:

$$x = \frac{750 \cdot 4\frac{1}{2}}{100} = 7{,}50 \cdot 4\tfrac{1}{2} = 33{,}75 .$$

Bezeichnet man die Schuldsumme allgemein mit S, den Diskontfuß für die Zeit der Vorauszahlung mit p und die Barsumme mit B, so besteht die Proportion:

$$100 : 100 - p = S : B.$$

Hieraus findet man:

$$B = S \cdot \frac{100 - p}{100};$$

$$S = 100 \cdot \frac{B}{100 - p}; \quad p = 100 \cdot \frac{S - B}{S}.$$

Zieht man hier die Zeit inbetracht und bezeichnet die Anzahl der Monate der Vorauszahlung mit t und den Diskontfuß pro Monat mit p, so hat man:

$$100 : 100 - pt = S : B.$$

Die kaufmännische Berechnungsweise des Diskonts ist zwar, vom rein theoretischen Standpunkt aus betrachtet, unrichtig. Allein sobald das Rechnen eine wirkliche Angelegenheit des Verkehrs behandelt, muß die mathematische Auffassung sich den thatsächlichen Verhältnissen des Verkehrslebens anschließen, da durch theoretische Betrachtungen die durch Herkommen und Übereinkunft bestehende Auffassungsweise des Verkehrs nun einmal nicht aus ihren Bahnen gelenkt werden kann. Im Verkehrsleben ist stets nur diejenige Lösungsweise einer Aufgabe die richtige, welche sich der hier herrschenden Praxis anschließt.*)

C) Die bürgerliche Diskontrechnung. Im bürgerlichen Leben rechnet man den Diskont nicht von der Zahl 100, sondern von der um p vermehrten Zahl 100, also von $100 + p$. Man nennt diese Art, den Diskont zu berechnen, Diskontrechnung auf 100. Wenn dem Verkäufer eines Grundstückes ein Kredit gewährt wird, ohne daß die Kaufsumme bis zur Zahlungsfrist einer Verzinsung unterliegt, so wird der Ver-

*) Man vergleiche den Aufsatz von O. Fleischhauer in der „Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht" von Prof. J. C. V. Hoffmann (XII. Jahrgang, Seite 18) „Die hauptsächlichsten Klippen der Rentenrechnung". In einer Note bemerkt Hoffmann: „Die Theoretiker sollen nichts der Praxis Widersprechendes lehren."

käufer, um sich schadlos zu halten, die Zinsen der Barsumme bis zum Verfalltage berechnen und dieselbe um diesen Zins erhöhen. Die später fällige Schuldsumme ist hier also als ein um die Zinsen vermehrtes Kapital (siehe unter A, 2) aufzufassen. Wenn der Ankäufer das Recht genießen will, die festgesetzte Schuldsumme vor dem Zahlungstermin abzutragen, so muß diese Bestimmung in den Kaufvertrag aufgenommen und der Diskontfuß, welcher der Abrechnung zugrunde gelegt werden soll, vereinbart werden. Nach der Höhe des Diskontfußes wird der Verkäufer auch die Erhöhung des Barwertes bemessen, so daß er keine Zinsen verliert. Kann z. B. jemand ein Grundstück für 1200 ℳ gegen bare Zahlung verkaufen und der Ankäufer erklärt, daß er erst nach Jahresfrist zu zahlen in der Lage sei, so wird der Verkäufer den obigen Preis um die einjährigen Zinsen von 1200 ℳ zu etwa $4\frac{1}{2}$ Prozent, also auf 1280 ℳ erhöhen. Hieraus ergiebt sich der

Grundsatz für die bürgerliche Diskontrechnung: Jede nach t Jahren fällige unverzinsliche Schuldsumme S ist aufzufassen als ein Kapital B (Barsumme), welches zu p Prozent verzinst in t Jahren zu der Schuldsumme anwächst. In Zeichen:

$$1)\quad S = B + \frac{B \cdot p \cdot t}{100}.$$

Folgerung: Statt einer nach t Jahren fälligen unverzinslichen Schuldsumme S ist dasjenige Barkapital zu zahlen, das zu p Prozent verzinst nach der Verfallzeit durch die Zinsen zu der gegebenen Schuldsumme anwächst.

Statt vorstehender Gleichung können wir die gleichwertige Formel 1) unter A, 2), nämlich:

$$S = B \cdot \frac{100 + pt}{100}$$

setzen, welche den Endwert eines Kapitals, der Barsumme B, bei einfacher Verzinsung ausdrückt.

Um die übrigen in der bürgerlichen Diskontrechnung vorkommenden Größen, Barsumme, Diskontfuß und Zeit der

Vorauszahlung berechnen zu können, gehen wir von der unter A, 2) gegebenen Proportion aus. Ersetzen wir die Größen K und K_1 durch B und S, so ist:

$$100 : 100 + pt = B : S.$$

Hieraus folgt:

$$B = S \cdot \frac{100}{100 + pt}$$

Nennen wir den Ausdruck $100 + pt$ „Diskontteiler", so heißt vorstehende Formel in Worten:

Lehrsatz: **Man findet die Barsumme, indem man den Quotienten aus 100 und dem Diskontteiler mit der Schuldsumme multipliziert.**

Der Wert des Diskontteilers ändert sich nach Zeit und Diskontfuß, er ist also eine von dem Werte der Buchstaben p und t abhängige Größe. All' diesen verschiedenen, veränderlichen Werten, welche der Diskontteiler annehmen kann, entspricht stets die durch die Zahl 100 bezeichnete Barsumme. Der Diskont (auf die Schuldsumme bezogen) wächst in der bürgerlichen Diskontrechnung nicht in geradem Verhältnisse zur Zeit. Daher ist die Anwendung des zusammengesetzten Dreisatzes zur Berechnung des Diskonts unrichtig. Vielmehr muß im Rechnen bei einer vorgelegten Aufgabe vorerst der Diskontteiler festgestellt und dann der einfache Dreisatz angewendet werden.

Beispiel. Ein Erblasser hat durch Testament bestimmt, daß der Erbe an A über 1 Jahr 750 ℳ und nach 2 Jahren dasselbe Kapital auszahlen soll. A wünscht die ganze Summe bar zu erhalten und bietet dem Erben 4 Prozent Diskont. Dieser geht auf den Vorschlag ein. Welches Kapital hat der Erbe an A auszuzahlen?

Auflösung. Der Diskontteiler $100 + pt$ heißt hier $100 + 4$ für das erste und $100 + 2 \cdot 4 = 108$ für das nach 2 Jahren fällige Kapital. Wir haben also:

a) $104 : 100 = 750 : x;$

mithin: $x = 75000 : 104 = 721{,}15.$

$$\text{b)}\quad 108 : 100 = 750 : x;$$

folglich:

$$x = 75\,000 : 108 = 694{,}44.$$

Die vom Erben an A auszuzahlende Barsumme ist also:

$$721{,}15\,\mathcal{M} + 694{,}44\,\mathcal{M} = 1415{,}59\,\mathcal{M}.$$

Falsch wäre hier der Ansatz:

104 ℳ Schulds. 1 Jahr 4 ℳ Diskont;
750 „ „ 2 „ ? „ „

Aus obiger Proportion folgen noch folgende Formeln:

$$p = \frac{100(S - B)}{B \cdot t}; \quad t = \frac{100(S - B)}{B \cdot p}.$$

Lehrsatz: Man findet aus der Schuldsumme, dem Barwerte und der Zeit der Vorauszahlung (dem Prozentsatze) den Diskontfuß (die Zeit), wenn man die Differenz zwischen Schuld- und Barsumme mit 100 multipliziert, und das Ergebnis durch das Produkt aus den Maßzahlen für Barsumme und Zeit dividiert.

Die vorstehenden Formeln beweisen strenge die Richtigkeit der im Rechenunterricht auf induktivem Wege gefundenen Wahrheit: Wenn in der bürgerlichen Diskontrechnung der Diskontfuß oder die Zeit der Vorauszahlung gesucht werden soll, so muß stets die **Barsumme** im Ansatz stehen.

Aufgabe 1): Ein Universalerbe hat die Verpflichtung, an einen Verwandten ein Kapital von 2700 ℳ über 2 Jahre ohne Zinsen auszuzahlen. Beide vereinbaren unter Berechnung eines bestimmten Diskontfußes Barzahlung. Welches war der festgesetzte Diskontfuß, wenn das Barkapital 2500 ℳ betrug?

Auflösung. Der vereinbarte Diskontfuß sei x Prozent, so hat man:

$$100 : 100 + 2x = 2500 : 2700$$

oder:

$$1 : 1 + 0{,}02x = 25 : 27;$$

folglich:

$$x = 4.$$

Aufgabe 2): a) Welchem Diskontfuß auf 100 ist n Prozent in 100 gleich? b) n Prozent auf 100 sind wie viel Prozent in 100?

Auflösung zu a): Es seien x Prozent auf 100 gleich n Prozent in 100, so besteht die Proportion:

$$100 - n : n = 100 : x;$$

folglich:

$$x = \frac{100 \cdot n}{100 - n}.$$

Ist $n = 5$, so ist:

$$x = 100 \cdot 5 : 95 = 5\tfrac{5}{19} \text{ (Prozent auf 100).}$$

Auflösung zu b): Der gesuchte Diskontfuß in 100 sei x, so hat man:

$$100 + n : n = 100 : x;$$

mithin:

$$x = \frac{100 \cdot n}{100 + n}.$$

Es sei $n = 5$, so ist:

$$x = 100 \cdot 5 : 105 = 4\tfrac{16}{21} \text{ (Prozent in 100).}$$

Die vorstehend behandelte Rechnungsart wird in den Rechenbüchern fast durchgängig die bürgerliche oder die **Rabattrechnung auf 100** genannt. Der Ausdruck „**Rabatt**" bedeutet aber im **Verkehr** einen Zahlungsnachlaß (Abzug) **ohne Rücksicht** auf die **Zeit** (Buchhändler-Rabatt), während **Diskont**, ebenso wie sein Gegensatz **Zins**, eine Nutzung bezeichnen, die von einer **bestimmten Zeitperiode abhängig** ist. Ein Beispiel, in welchem **Rabatt** berechnet wird, ist folgendes:

Eine Buchhändler-Rechnung im Betrage von 45,80 ℳ wird mit 15 Prozent Rabatt ausgezahlt. Wie viel beträgt der Rabatt?

Auflösung.

$$100 : 15 = 45,80 : x$$

$$x = \frac{15 \cdot 45,80}{100} = 6,87 \text{ (ℳ).}$$

§ 83. **Verteilungs= und Mischungsrechnung.**

A) **Die Verteilungs= oder Gesellschaftsrechnung** hat die Aufgabe, eine gegebene Größe in ungleiche Teile zu zerlegen.*) Die ganze oder die zu teilende Größe (benannte Zahl) heißt Teilungs= oder Hauptsumme und die gesuchten Teile werden Anteile genannt. Die Angaben in einer Aufgabe, in welchem Verhältnisse die durch Zerlegung gefundenen Anteile stehen sollen, nennt man Teilungsfuß. Letzterer heißt arithmetisch, wenn ihm ein arithmetisches Verhältnis zugrunde liegt, z. B.: 100 ℳ sollen unter zwei Armen so verteilt werden, daß der eine 10 ℳ mehr als der andere erhält. Ist dagegen der Teilungsfuß durch ein geometrisches Verhältnis ausgedrückt, so wird derselbe geometrischer Teilungsfuß genannt. Beispiel: Zwei Schlossermeister übernehmen eine Arbeit, für welche 150 ℳ gezahlt werden. Der eine Meister stellt 2, der andere 3 Gesellen zur Vollendung der Arbeiten. Wie viel ℳ erhält jeder Meister? Nach der Art des Teilungsfußes unterscheidet man die Aufgaben der Gesellschaftsrechnung in zwei Hauptgruppen. Der geometrische Teilungsfuß kann auch durch Verbindung von zwei oder mehreren Verhältnissen bestimmt sein und heißt alsdann zusammengesetzter geometrischer Teilungsfuß. Hierher ist der Fall zu rechnen, in welchem bei der Berechnung der Anteile aus den Verhältnissen je zweier derselben zunächst ein fortlaufendes Verhältnis zwischen sämtlichen Anteilen gebildet werden muß. Beispiel: Unter 3 Personen, A, B und C, sollen 200 ℳ so verteilt werden, daß die Anteile von A und B sich wie $4:5$, und die von B und C sich wie $2:3$ verhalten. Endlich kann auch der geometrische Teilungsfuß mit dem arithmetischen verbunden vorkommen, z. B.: Man teile 50 ℳ so unter 2 Personen, daß die eine zweimal so viel als die andere und noch 10 ℳ erhält. Einige Rechenlehrer**) unterscheiden die Gesellschaftsrechnung

*) Die Zerlegung von Größen und reinen Zahlen in gleiche Teile geschieht durch die Division.

**) Diesterweg und Heuser.

in einfache und zusammengesetzte, je nachdem den Aufgaben ein einfacher oder zusammengesetzter Teilungsfuß zugrunde liegt.

Der in den Aufgaben der Gesellschaftsrechnung häufig vorkommende Ausdruck „Teil" bezeichnet eine bestimmte, vorläufig noch unbekannte Zahl, deren Größe sich erst im Verlaufe der Rechnung ergiebt. Dieser Ausdruck hat dieselbe Bedeutung, wie in der Algebra der Buchstabe x, er bezeichnet also während einer und derselben Rechnung stets dieselbe Zahl (Einleitung, Seite 5).

Eine wesentliche Abkürzung bei der Lösung gewisser Aufgaben dieser Rechnungsart gewährt die Anwendung des Gesetzes über die Wertbeständigkeit des geometrischen Verhältnisses (§ 69, 5) Lehrsatz). Sind die Glieder der gegebenen geometrischen Verhältnisse ganze Zahlen und haben dieselben einen gemeinschaftlichen Teiler, so drücke man sie durch kleinere Zahlen aus. Bestehen die Glieder eines geometrischen Verhältnisses aus Brüchen, so verwandele man dasselbe in ein Verhältnis aus ganzen Zahlen. Die Benutzung dieser Umformungen gewährt namentlich beim Kopfrechnen große Erleichterung.

Grundaufgabe der Verteilungsrechnung. Die Zahl 1200 (allgemein S) soll in 3 Teile zerlegt werden, so daß dieselben in dem Verhältnisse $3:4:5$ (allgemein $a:b:c$) stehen.

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchten Teile vorläufig mit x, y und z, so ist:

1) $x+y+z=1200$	I) $x+y+z=S$
2) $x:y:z=3:4:5.$	II) $x:y:z=a:b:c.$

Aus den fortlaufenden Proportionen 2) und II) folgt nach § 76, 3) Lehrsatz:

3) $x+y+z:3+4+5=x:3$	III) $x+y+z:a+b+c=x:a$
$=y:4$	$=y:b$
$=z:5.$	$=z:c.$

Setzt man statt $x+y+z$ die Zahl 1200, bezw. S, so entsteht:

4) $1200 : 12 = x : 3$
$= y : 4$
$= z : 5.$

Folglich:

$$x = 3 \cdot \frac{1200}{12} = 300.$$

5) $y = 4 \cdot 100 = 400$

$z = 5 \cdot 100 = 500.$

IV) $S : a + b + c = x : a$
$= y : b$
$= z : c.$

Mithin:

$$x = a \cdot \frac{S}{a + b + c}.$$

V) $y = b \cdot \frac{S}{a + b + c}$

$z = c \cdot \frac{S}{a + b + c}.$

Bezeichnet man die Summe der Verhältniszahlen $a, b, c \cdots$ mit s, die Anteile mit $A, B, C \cdots$, so geht die Proportion IV) in folgende über:

$s : a = S : A,$ mithin: $A = a \cdot \frac{S}{s}.$

$s : b = S : B,$ $B = b \cdot \frac{S}{s}.$

Diese Proportionen und die Gleichungen für die Anteile lauten in Worten:

Lehrsätze: 1) Jede Verhältniszahl verhält sich zur Summe der Verhältniszahlen wie der einzelne Anteil zur Teilungssumme.

2) Man erhält die einzelnen Anteile, wenn man den Quotienten aus der Teilungssumme und der Summe der Verhältniszahlen mit den einzelnen Verhältniszahlen multipliziert.

Aufgabe. Bei einem Konkurs sollen 12320 ℳ unter vier Gläubiger, A, B, C und D nach Verhältnis ihrer Forderungen verteilt werden. Nun verhalten sich die Forderungen von A und B wie $4 : 5$, von D und C wie $5 : 2$, und von D und B wie $4 : 3$. Wie viel erhält jeder Gläubiger?

Auflösung. Aus den gegebenen Verhältnissen bilde man die Proportionen:

$$A : B = 4 : 5$$
$$B : D = 3 : 4$$
$$D : C = 5 : 2.$$

Hieraus folgt nach § 77 die fortlaufende Proportion:

$$A : B : C : D = 12 : 15 : 8 : 20.$$

Mithin erhält nach obigen Formeln:

$$A : 12 \cdot \frac{12\,320}{55} \mathcal{M} = 12 \cdot 224 \mathcal{M} = 2688 \mathcal{M}$$

$$B : 15 \cdot 224 \mathcal{M} = 3360 \mathcal{M}$$

$$C : 8 \cdot 224 \mathcal{M} = 1792 \mathcal{M} \quad \text{und}$$

$$D : 20 \cdot 224 \mathcal{M} = 4480 \mathcal{M}.$$

B) **Mischungsrechnung.** Bei jedem Stoffe kommen Güte oder Qualität und Menge, Masse oder Quantität inbetracht. Die Güte eines Stoffes ist dem Preise seiner Einheit, z. B. eines kg, 1 l, direkt proportional, und mithin ist die Qualität durch diesen Preis vollständig bestimmt. Bei Metalllegierungen dagegen wird die Güte (der Wert) in der Weise ausgedrückt, daß man z. B. angiebt, wie viel reines Silber oder Gold unter 1000 Teilen der Legierung enthalten sind. Die Qualität gewisser Flüssigkeiten bezeichnet man durch Angabe des Prozentgehaltes eines bestimmten Stoffes. So z. B. sagt man, der Spiritus hat 80 Prozent oder Grad, wenn unter 100 Teilen der Mischung sich 80 Teile reiner Spiritus befinden.

Die Mischungsrechnung beschäftigt sich hauptsächlich mit zwei Fragen:

1) Es werden beliebige Stoffmengen von verschiedener Güte gemischt (vermengt), und man soll den Wert der Einheit der Mischung, den sogenannten Durchschnittswert, berechnen. Die Aufgaben dieser Art bilden einen Teil der Durchschnittsrechnung. (Vergleiche arithmetisches Mittel, Seite 208.)

2) In welchem Verhältnisse müssen verschiedene Stoffe gemischt werden, damit die Einheit der Mischung einen gegebenen Durchschnittswert erhält? Die Beantwortung dieser Frage ist Aufgabe der Mischungsrechnung im engeren Sinne.

Sind die Verhältnisse der Mischungsteile gegeben, und man soll die Mengen der einzelnen Stoffe bei einer gegebenen Gesamtmasse berechnen, so gehören die Aufgaben mit Rücksicht auf die Art der Rechnung in die Verteilungsrechnung. Z. B.: Zur

Bereitung von rotem Siegellack nimmt man 1 Teil Kreide, 4 Teile Terpentin, 6 Teile Zinnober und 6 Teile Schellack. Wie viel von diesen Stoffen ist zur Herstellung von 50 kg Siegellack erforderlich?

1) Durchschnittsrechnung. Ein Kaufmann mengt verschiedene Sorten Kaffee und zwar 50 kg à 1,80 *M*, 30 kg à 1,60 *M* und 40 kg à 1,40 *M*. Welchen Wert hat 1 kg des Gemenges?

Auflösung. Das Gemenge hat den Wert:

$$50 \cdot 1{,}80\ \mathcal{M} + 30 \cdot 1{,}60\ \mathcal{M} + 40 \cdot 1{,}40\ \mathcal{M}$$

und enthält:

$$(50 + 30 + 40)\ \text{kg}.$$

Mithin kostet 1 kg im Durchschnitt:

$$\frac{50 \cdot 1{,}80 + 30 \cdot 1{,}60 + 40 \cdot 1{,}40}{50 + 30 + 40}\ \mathcal{M}.$$

Bezeichnet man allgemein die Quantitäten der Stoffe A, B, C und D mit m, n, p und q, die Preise der Einheiten mit a, b, c und d, so ist die Qualität Q der Mischung, bezw. des Gemenges:

$$Q = \frac{am + bn + cp + dq}{m + n + p + q}.$$

Wie lautet diese Formel in Worten? Haben die Zahlen m, n, p und q einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann man die Berechnung des Durchschnittswertes vereinfachen. In vorstehendem Beispiel kürze man den Ausdruck (Quotient) für den Wert der Einheit des Gemenges, dann ist:

$$Q = \frac{5 \cdot 1{,}80 + 3 \cdot 1{,}60 + 4 \cdot 1{,}40}{5 + 3 + 4}\ \mathcal{M}.$$

Hieraus folgt: Man erhält den Wert der Einheit der Mischung, wenn die Quantitäten in demselben Verhältnisse wie $m : n : p : q$ gemischt werden. Wie heißt die Formel für Q in Worten, wenn die Quantitäten gleich sind?

2) Eigentliche Mischungsrechnung. Aufgabe: In welchem Verhältnisse muß man zwei Stoffe A und B mischen, damit die Einheit der Mischung den Wert m erhält, wenn der

Wert der Einheit der besseren Sorte A durch a und der andern Sorte mit b bezeichnet wird?

Auflösung. Der Wert m liegt offenbar zwischen a und b. Durch arithmetische Vergleichung ergiebt sich: jede Einheit von A ist um $a - m$ größer, und die Qualität von B ist um $m - b$ kleiner als der Wert einer Einheit der Mischung. Nimmt man nun von der Sorte A S_1 Einheiten, so entsteht dadurch ein Überschuß vom Werte $S_1(a - m)$. Werden S_2 Einheiten von der Sorte B zur Mischung genommen, so rufen diese einen Mangel im Werte von $S_2(m - b)$ hervor. Damit in der Mischung ein Ausgleich zwischen jenem Überschusse und diesem Mangel stattfindet, muß:

$$S_1(a - m) = S_2(m - b)$$

sein. Es muß also die Proportion:

$$S_1 : S_2 = m - b : a - m$$

bestehen. In Worten:

Lehrsatz: Die zur Hervorbringung eines gegebenen Durchschnittspreises erforderlichen Quantitäten verhalten sich umgekehrt wie die Zahlenwerte, welche den Überschuß und Mangel ausdrücken.

Auf dieser Wahrheit beruht das im Rechenunterricht gelehrte „Schema der Mischungsrechnung".

1) Beispiel. Ein Weinhändler erhält den Auftrag, 150 l Weißwein, das Liter zu 0,80 ℳ zu liefern. Da er Wein von der gewünschten Qualität nicht vorrätig hat, so mischt er zwei Weinsorten zu 1,10 ℳ und 0,60 ℳ pro Liter. Wie viel Liter sind von jeder Sorte zu nehmen?

Schema:

1. Sorte 1,10 ℳ	Durchschnittspreis	+ 0,30 ℳ	2
2. Sorte 0,60 „	0,80 ℳ	— 0,20 „	3

Das Verhältnis der zu mischenden Quantitäten ist also 2 : 3. Die Bestimmung der Mengen der Weinsorten geschieht durch die Gesellschaftsrechnung. Man hat:

$$5:2 = 150:x; \quad x = 60 \text{ (Liter 1. Sorte)}$$

und $150\,l - 60\,l = 90\,l$ der 2. Sorte.

2) Beispiel. Wie viel Silber von 0,800 fein muß man zu 1 kg reinem Silber nehmen, wenn die Legierung den Feingehalt 0,850 erhalten soll?

a) Auflösung mit Benutzung des Feingehaltes. Der Feingehalt des reinen Silbers ist gleich 1, der zweiten Sorte 0,800 und der neuen Legierung 0,850.

Schema:

1. Sorte	1	Legierung	+ 0,15	1
2. Sorte	0,800	0,850	— 0,05	3.

Das Verhältnis der erforderlichen Quantitäten ist 1 : 3. Es sind also 1 kg reinem Silber 3 kg von 0,800 fein zuzusetzen.

Lösung b). Man gehe vom Zusatz aus. Derselbe ist im reinen Silber gleich 0, in der andern Silbersorte 0,200 und in der Legierung 0,150.

Schema:

1. Sorte	0	Legierung	— 0,150	1
2. Sorte	0,200	0,150	+ 0,050	3.

Die weitere Berechnung geschieht wie vorhin.

Fünfter Abschnitt.

Algebra: Gleichungen ersten und zweiten Grades.

§ 84. Begriff und Einteilung der Gleichungen.

Begriff. Eine Gleichung ist die Verbindung gleicher Größen durch das Gleichheitszeichen. Die Ausdrücke, welche links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen, heißen Seiten der Gleichung und die einzelnen durch + oder — miteinander verbundenen Größen werden Glieder der Gleichung genannt. In der Gleichung:

$$x + b = c - d$$

bildet der Ausdruck $x + b$ die linke und der Ausdruck $c - d$ die rechte Seite der Gleichung; die Zahlzeichen x, b, c und d sind ihre Glieder. (Vergleiche Einleitung 11.)

Zweck und Arten. Die Gleichungen dienen entweder zur Darstellung oder zur Auffindung, Entwickelung allgemeiner mathematischen Gesetze oder zur Berechnung der Werte von unbekannten Größen. Hierauf beruht die Einteilung der Gleichungen in analytische und algebraische.

Eine analytische Gleichung ist eine solche, in welcher die eine Seite bloß die Umformung oder Entwickelung der andern darstellt, z. B.:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Viele mathematische Formeln (Einleitung 11) sind analytische Gleichungen. Bestehen beide Seiten einer analytischen Gleichung aus denselben Größen, so nennt man dieselbe vorzugsweise eine identische, z. B.:

$$a + b = a + b$$
$$a - b = a - b.$$

Da sowohl die analytischen als auch speziell die identischen Gleichungen allgemein gültige mathematische Gesetze darstellen, so sind solche Gleichungen unbedingt richtig, welchen Wert man auch den allgemeinen Zahlen beilegen mag.

Algebraische Gleichungen. Sind dagegen die Seiten der Gleichung nur unter der Bedingung einander gleich, daß einzelne Buchstaben einen (oder mehrere) bestimmten Zahlenwert bezeichnen, so heißt die Gleichung eine algebraische. Da die Richtigkeit der algebraischen Gleichung durch einen bestimmten Wert gewisser Buchstaben bedingt wird, mit anderen Worten: da die Richtigkeit der Gleichung an die Bedingung geknüpft ist, daß gewisse Größen bestimmte (durch Rechnung zu ermittelnde) Zahlenwerte vertreten, so nennt man dieselbe auch Bedingungsgleichung. Auch kommt die Bezeichnung „synthetische Gleichung" vor. Die Gleichung:

$$x + 3 = 10$$

ist eine algebraische, da dieselbe nur unter der Bedingung richtig ist, daß der Buchstabe x den bestimmten Wert 7 vertritt. Es leuchtet ein, daß durch Einsetzung des bestimmten Zahlenwertes an Stelle der unbekannten Zahl x sich die algebraische Gleichung in eine identische verwandelt.

Bekannte und unbekannte Größen. Die in einer algebraischen Gleichung enthaltenen Glieder, deren Wert erst bestimmt werden muß, damit die Gleichung in eine identische übergeht, heißen unbekannte Größen oder kurzweg die Unbekannten, während diejenigen Zahlen, die zur Ermittelung des Wertes der Unbekannten gegeben sind, bekannte Größen genannt werden. In der Algebra pflegt man die zu bestimmenden Zahlen mit den letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets (x, y, z) und die bekannten Größen entweder mit bestimmten Zahlen oder mit den kleinen Anfangsbuchstaben des lateinischen Alphabets zu bezeichnen. Gleichungen, deren bekannte Größen nur Buchstaben sind, heißen litterale; bestehen hin-

gegen die Bekannten aus Zifferngrößen (numeri), so nennt man die Gleichung eine **numerische**.

Je nachdem in den Gleichungen eine oder mehrere unbekannte Zahlen auftreten, unterscheidet man Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten. Eine Gleichung mit einer Unbekannten ist:

$$x + 12 = 20.$$

Die Gleichung

$$x + y = 30$$

enthält zwei Unbekannten.

§ 85. Umformung der Gleichungen.

Mit einer Gleichung lassen sich vielfache Veränderungen vornehmen, die man insgesamt mit dem Ausdruck **Umformung** bezeichnet. Bei Umformung einer Gleichung müssen auf beiden Seiten dieselben Rechenoperationen vorgenommen werden.

Heißt die Gleichung allgemein:

$$A = B,$$

in welcher die Zeichen A und B algebraische Summen (§ 43) und einfache Zahlen bezeichnen sollen, und drückt m irgend eine ganze oder gebrochene Zahl aus, so kann man mittels der sieben Grundrechnungsarten (§ 28) die folgenden neuen Gleichungen bilden:

1) $A + m = B + m$

2) $A - m = B - m$

3) $m \cdot A = m \cdot B$

4) $\frac{A}{n} = \frac{B}{n}$

5) $A^m = B^m$

6) $\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{B}$

7) ${}^m\log A = {}^m\log B$.

Die Richtigkeit dieser abgeleiteten Gleichungen gründet sich auf gewisse im ersten Abschnitt bei den einzelnen Rechnungsarten bewiesene Lehrsätze (§ 3, 3) Lehrs.; § 8, 7) Lehrs. u. s. w.). Mit Rücksicht auf die Umformung der Gleichungen kann man

die durch vorstehende Formeln dargestellten Gesetze zusammenfassen in folgenden

Hauptsatz: Jede Gleichung bleibt richtig, wenn mit ihren Seiten, d. h. mit allen Gliedern der Gleichung, dieselben Rechenoperationen durch die gleiche Zahl vollzogen werden.

1) Die durch die Formeln 1) und 2) ausgedrückten Lehrsätze benutzt man, um die mit der Unbekannten x verbundenen positiven oder negativen Glieder von x zu trennen, bezw. dieselben auf die andere Seite zu bringen. Z. B.:

$$x - a + b = c.$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung a addiert und b subtrahiert, giebt:

$$x = a - b + c.$$

2) Den Lehrsatz: Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man jede Seite mit derselben Zahl multipliziert, wendet man an, um die in Gleichungen vorkommenden Divisoren fortzuschaffen. Zu diesem Zwecke multipliziert man alle Glieder mit dem kleinsten Hauptdivisor sämtlicher Quotienten. Es sei z. B. die Gleichung gegeben:

$$\frac{x}{c} - \frac{b}{a} = d.$$

Die Gleichung mit ac multipliziert giebt:

$$ax - bc = acd,$$

also eine Gleichung, in welcher nur ganze Zahlen vorkommen. Wenn auch das Fortschaffen nur solcher Brüche notwendig ist, in welchen x als Nenner erscheint, so ist doch die Beseitigung aller Quotienten zu empfehlen, da hierdurch eine Reduktion der Gleichung durch Vereinigung gleichnamiger Zahlgrößen möglich wird. Näheres über die Auflösung von Gleichungen, in welchen Quotienten aus algebraischen Summen vorkommen, bringt § 89. Wird eine Gleichung mit (-1) multipliziert, so erhalten alle Glieder das entgegengesetzte Vorzeichen.

3) Von dem Lehrsatze: Man kann eine Gleichung durch dieselbe Zahl dividieren, macht man Anwendung: 1) um die

mit einem Faktor (Koeffizienten) behaftete unbekannte Größe von ersterem zu befreien; 2) um eine Gleichung auf eine einfachere Form zu bringen, wenn die Glieder einen gemeinschaftlichen Faktor haben, z. B.:

$$1)\quad 6x = 48; \qquad ax = b + c.$$

Dividiert man beiderseits durch 6, bezw. a, so erhält man:

$$x = 48 : 6 = 8 \quad \text{und} \quad x = (b + c) : a.$$

2) Gegeben:

$$a)\quad 20x + 15y = 60;$$

$$b)\quad (a + b)x + (a^2 - b^2)y = (a + b)^2.$$

Sämtliche Glieder der Gleichung unter a) haben den Faktor 5 gemeinsam. Dieselbe auf eine einfachere Form gebracht, giebt:

$$4x + 3y = 15 \quad \text{oder} \quad 1\tfrac{1}{3}x + y = 4.$$

Die Gleichung unter b) durch $a + b$ dividiert, liefert:

$$x + (a - b)y = a + b.$$

Bei Auflösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten mittels der Additions- und Subtraktionsmethode kommt der unter 2) angegebene Fall oft vor.

4) Anwendung von Formel 5): Erscheint in einer Gleichung die unbekannte Größe unter dem Wurzelzeichen, so kann man letzteres dadurch beseitigen, daß man die Wurzelgröße allein auf eine Seite schafft und die Gleichung, d. h. beide Seiten, mit dem Wurzelexponenten potenziert. Ist z. B.:

$$\sqrt{x} - 8 = 16,$$

so ist nach 1):

$$\sqrt{x} = 16 + 8 = 24.$$

Potenziert man diese Gleichung mit dem Exponenten 2, so steht:

$$(\sqrt{x})^2 = 24^2 \quad \text{oder} \quad x = 576.$$

Man hüte sich vor dem Fehler, die einzelnen Glieder einer Gleichung zu potenzieren.

5) Benutzung von Formel 6): Tritt in einer Gleichung die Unbekannte als Basis einer Potenz auf, so kann man die

Unbekannte von ihrem Exponenten befreien, indem man die Potenzgröße x^n allein auf eine Seite bringt, x^n isoliert, und dann beide Seiten dieser Gleichung durch den Potenzexponenten n radiziert. Wenn:

$$x^2 - 25 = 39,$$

so ist nach 1):

$$x^2 = 39 + 25 = 64.$$

Zieht man nun aus beiden Seiten dieser Gleichung die Quadratwurzel, so erhält man $x = \pm 8$. Man beachte wohl, daß nur jede Seite, nicht jedes einzelne Glied der Gleichung radiziert werden darf. Auch ist das Vorzeichen der Wurzel mit Vorsicht anzuwenden. (Man vergleiche die Bemerkungen § 19 am Schlusse und die Lehrsätze unter VI, Seite 119.)

Ausführlicheres über die Behandlung von Wurzelgleichungen ist in § 90 enthalten. Ist es auch gestattet, eine Gleichung den Rechenoperationen der zweiten und dritten Stufe durch 0 zu unterwerfen?

§ 86. Ordnen und Auflösen der Gleichungen.

Erscheint in einer Gleichung die Unbekannte durch zwei oder mehrere Operationen mit andern Zahlen verbunden oder als Divisor von Quotienten, so nennt man die Gleichung eine unentwickelte; führt man die Rechenarbeiten aus, um die Unbekannte von den mit ihr verknüpften Gliedern zu trennen, oder schafft man durch Umformung die unbekannten Größen aus den Divisoren fort, so hat man eine entwickelte Gleichung. So sind z. B. die Gleichungen:

$$1)\quad (a + x)^2 + (x - b)x = c$$

$$2)\quad \sqrt{x - a} + (b - x)c = d$$

$$3)\quad \frac{x^2 + 2x}{x - 6} = \frac{x + 6}{x - 4}$$

unentwickelte und die folgenden:

$$2x^2 + (2a - b)x + a^2 = c$$

$$x^3 - 3x^2 - 8x + 36 = 0$$

die entwickelten Gleichungen von 1) und 3).

Die erste Arbeit beim Auflösen einer gegebenen Gleichung ist das Entwickeln und Ordnen derselben. Das Ordnen der Gleichungen geschieht dadurch, daß man durch Umformung alle Glieder, in welchen die Unbekannte (Hauptgröße) vorkommt, auf eine Seite bringt und dieselben nach fallenden Potenzen aufeinander folgen läßt, wobei zu beachten ist, daß die höchste Potenz der Unbekannten positiv und mit dem Koeffizienten 1 behaftet sein muß. Die allgemeine Form einer geordneten Gleichung des vierten Grades ist:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = d,$$

des $n$ten Grades:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \cdots\cdots cx = d.$$

Besonders ist es gebräuchlich, eine Gleichung so umzugestalten, daß alle Glieder auf einer Seite stehen, also die andere Seite Null ist. Diese Umformung heißt, die Gleichung auf Null reduzieren. So z. B. heißt die der Gleichung:

$$a - b - x^2 = c - x^3 + x$$

entsprechende auf Null gebrachte Gleichung:

$$x^3 - x^2 - x + a - b - c = 0.$$

Beim Ordnen der Gleichungen ist folgendes Verfahren einzuschlagen:

1) Die Brüche oder Divisoren sind fortzuschaffen.
2) Die Klammern müssen aufgelöst werden, jedenfalls in dem Falle, wenn die Unbekannte als Glied eines zusammengesetzten Klammerausdrucks vorkommt.
3) Erscheint die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen, so muß sie von diesem befreit werden.
4) Bringe man die unbekannten Glieder alle auf eine Seite, so daß fallende Potenzen entstehen.
5) Fast durchgängig kann man beiderseits mehrere Glieder durch Addition und Subtraktion in ein einziges Glied vereinigen und dadurch die Gleichung auf eine geringere Anzahl von Gliedern reduzieren.

Je nachdem nach dem Entwickeln und Ordnen einer Gleichung die Unbekannte in der ersten, zweiten, $n$ten Potenz erscheint, nennt man die Gleichung vom ersten, zweiten, $n$ten **Grade**. Die Gleichungen vom ersten Grade heißen auch einfache oder lineare*), die vom zweiten auch quadratische, vom dritten kubische und die vom vierten Grade biquadratische Gleichungen. Kommt in einer Gleichung die Unbekannte als **Exponent** einer Potenz oder einer Wurzel vor, so nennt man die Gleichung eine **transcendente****) oder **Exponentialgleichung**, z. B.:

$$5^x = 25; \qquad 4^x = 64.$$

$$\sqrt[x]{27} = 3; \qquad \sqrt[x]{256} = 4.$$

Der Grad einer algebraischen Gleichung kann erst dann mit Sicherheit angegeben werden, wenn erstere entwickelt und geordnet ist. Die Gleichung:

$$\frac{18}{x-4} + \frac{24}{x+2} = 12$$

scheint eine Gleichung ersten Grades zu sein. Dagegen hat sie nach ihrer Entwickelung und Umformung die Form:

$$x^2 - \frac{11}{2}x - 3 = 0$$

und ist daher eine Gleichung vom **zweiten** Grade. Die Gleichungen:

$$4x^2 + 25x = (x+7)^2 + 3x^2 + 6$$

$$(2x+3)^2 + (4x-5)^2 = 20(x+2)^2 + 8$$

---

1) Der Ausdruck „lineare" Gleichung stammt aus der analytischen Geometrie, worin eine gerade Linie durch eine Gleichung ersten Grades zwischen x und y dargestellt wird und umgekehrt eine solche Gleichung stets eine gerade Linie bezeichnet.

2) Die Bezeichnung „transcendent" hat **Leibniz** eingeführt. In den transcendenten Gleichungen ist die Unbekannte mit den bekannten Zahlen nicht bloß durch arithmetische, sondern auch durch transcendente Rechenoperationen verknüpft, welche so zu sagen die Kräfte oder Mittel der Algebra gewöhnlich übersteigen. Die transcendenten Gleichungen bilden für sich eine besondere Art. In dieser Schrift werden nur **algebraische** Gleichungen behandelt.

gehören scheinbar dem zweiten Grade an, ihre Entwickelungen und Umformungen liefern die Gleichungen ersten Grades:

$$11x + 55 = 0$$

und $$108x + 54 = 0.$$

Jede vorgelegte Gleichung mit einer Unbekannten, gleichviel von welchem Grade sie ist, kann auf eine bestimmte Form zurückgeführt werden, welche die Gleichung desselben Grades in einfachster Weise darstellt. Man nennt diese Form die Normalform der Gleichungsart. Die Normalformen einer Gleichung ersten und zweiten Grades sind:

$$1) \quad ax = b$$

$$2) \quad x^2 \pm px = \pm q.$$

Hat man die Gleichung geordnet, so beginnt die Auflösung derselben. Eine Gleichung auflösen heißt, für die Unbekannte einen Wert suchen, welcher der Gleichung genügt, d. h. an Stelle von x gesetzt, die algebraische Gleichung in eine identische verwandelt. Diesen Wert nennt man Wurzel der Gleichung. Die unbestimmten, quadratischen und höheren Gleichungen werden durch mehrere Werte befriedigt, und zwar hat jede Gleichung so viele Wurzeln, als der Potenzexponent der Unbekannten Einheiten bezeichnet. (Vergleiche Seite 120, Lehrs. 1) und das dort in der Note Gesagte.) Das Verfahren zur Auflösung besteht darin, daß man die Gleichung durch Rechenoperationen verändert, bis die Unbekannte direkt durch eine Verbindung mit nur bekannten Zahlen ausgedrückt wird.

Geschichtliche Bemerkungen. Der Name „Algebra", welcher zunächst die Auflösungslehre der Gleichungen umfaßt, hat seinen Ursprung in dem arabischen Worte „algebr". Mohammed ben Musa gebrauchte zuerst die Bezeichnungen „algebr walmukâbala", welche indes nur zwei bei der Auflösung von Gleichungen vorkommende Regeln ausdrücken. „Algebr" (restauratio) heißt so viel als Wiederherstellung, Ergänzung und bezeichnet die Regel, wodurch eine Gleichung so umgeformt wird, daß sämtliche Glieder positiv werden. So ist z. B. in der Gleichung $x - 6 = 8$ die Zahl 6 die Ergänzung zu x, wodurch die neue Gleichung $x = 8 + 6$ entsteht. In Spanien wird noch heutzutage der Wundarzt „algebrista" genannt, welcher Name ebenfalls von „algebr" herrührt.

Das Wort walmukâbala (oppositio) bedeutet so viel als Gegenüberstellung, unter welcher das Heben gleicher Glieder auf beiden Seiten einer Gleichung zu verstehen ist. So folgt z. B. aus $x + a = b + a$ die neue Gleichung $x = b$, indem die gleichen Glieder $+ a$ wegfallen. Im Laufe der Zeit kam nur das erste Wort Algebra allgemein in Gebrauch, zugleich erhielt dieser Name eine weitere Bedeutung, so daß man sogar auch die allgemeine Arithmetik mit einschließt.

Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe.

§ 87. Auflösung der einfachen Gleichungen mit einer Unbekannten.

Die einfachsten Gleichungen ersten Grades sind diejenigen, in welchen die Unbekannte x nur einmal und nur zwei bekannte Zahlen vorkommen. Ihre Auflösung geschieht unmittelbar durch Anwendung gewisser im ersten Abschnitt bei den einzelnen Rechnungsverfahren aufgestellten arithmetischen Grundgesetze. (Man sehe § 5 die Gesetze unter 2) und 3), § 12, 1 und 2), § 15, 2), § 18 und § 28, 2) und 3).) Wir lassen hier die einfachsten Gleichungen mit ihren Auflösungen folgen:

$$\text{I.} \begin{cases} x + a = b \\ x = b - a; \end{cases} \quad \text{II.} \begin{cases} x - a = b \\ x = a + b; \end{cases} \quad \text{III.} \begin{cases} a - x = b \\ x = a - b; \end{cases}$$

$$\text{IV.} \begin{cases} ax = b \\ x = b : a; \end{cases} \quad \text{V.} \begin{cases} x : a = b \\ x = a \cdot b; \end{cases} \quad \text{VI.} \begin{cases} a : x = b \\ x = a : b; \end{cases}$$

$$\text{VII.} \begin{cases} x^n = b \\ x = \sqrt[n]{b}; \end{cases} \quad \text{VIII.} \begin{cases} \sqrt[n]{x} = b \\ x = b^n. \end{cases}$$

Aus diesen Auflösungen folgern wir die folgenden sogenannten Transpositionsregeln, d. h. Regeln über die Versetzung der Glieder, Faktoren u. s. w., welche die Grundlage des Verfahrens bei der gebräuchlichsten Auflösungsmethode verwickelter Gleichungen bilden.

1) Man kann alle Glieder, mit denen die Unbekannte durch $\pm$ verbunden vorkommt, ohne weiteres mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite schaffen (I, II und III). Diese Versetzung heißt nichts anderes,

als die Glieder beiderseits addieren, bezw. subtrahieren. Ist x mit einer algebraischen Summe verbunden, so transponiere man dieselbe mit einem Male auf die andere Seite, so z. B. schreibe man aus: $x - (a - b + c) = d$

sofort hin: $x = (a - b + c) + d.$

Man achte besonders darauf, daß nur solche Ausdrücke versetzt werden dürfen, welche unmittelbar als Glieder einer Seite erscheinen, nicht aber solche, welche nur Teile von Gliedern sind. Falsch ist es z. B., aus:

$$\frac{x - a}{c} = b$$

die Gleichung:

$$\frac{x}{c} = a + b$$

zu bilden. Richtig aber ist:

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{c} + b.$$

Aus $(a - b) \cdot x = c$ folgt nicht $ax = b + c.$

Obige Regel wird besonders benutzt, um eine Gleichung zwischen zwei algebraischen Summen auf Null, bezw. ihre Normalform, zu reduzieren. In der Regel transponiert man beim Auflösen einer Gleichung alle Glieder mit x auf die linke und die bekannten Glieder auf die rechte Seite. Man kann indes die Unbekannten auch auf die rechte Seite transponieren, was in manchen Fällen zweckmäßig ist.

2) Jeder Faktor einer Seite wird Divisor der andern Seite und umgekehrt: ein Divisor der einen Seite kann als Faktor auf die andere Seite gesetzt werden (IV und V).

3) Ist eine Seite eine Differenz oder ein Quotient, so kann man den Subtrahenden oder den Divisor mit der andern Seite vertauschen (III und VI). Vergleiche § 5, 3) u. s. f., § 12, 3) u. s. w.

4) Ein Potenzexponent der einen Seite kann als Wurzelexponent auf die andere Seite gesetzt werden und umgekehrt: ein Wurzelexponent der einen Seite

wird Potenzexponent der andern Seite (VII und VIII). So folgt aus:

$$\sqrt{x} = 9 \quad \text{sofort} \quad x = 9^2 = 81\,,$$

und aus:

$$x^2 = 144 \quad \text{sogleich} \quad x = \pm 12\,.$$

Aus Vorstehendem ergiebt sich, daß die Umformung und Auflösung der Gleichungen vorherrschend im Transponieren besteht. — Für die Praxis merke man sich noch: Die Gleichung bleibt richtig, wenn man die Vorzeichen aller Glieder umkehrt. Dies folgt daraus, daß man alle Glieder versetzen oder mit (— 1) multiplizieren darf.

Die Gleichung unter VII gehört zu den Gleichungen höherer Grade und ihre vollständige Auflösung (n Wurzeln) überschreitet den Rahmen dieser Schrift, sobald der Wurzelexponent die Zahl 2 übersteigt. Wenn aber b eine positive Zahl bezeichnet, so kann man stets eine Wurzel bestimmen.

Die unter 1) bis 4) enthaltenen Gesetze können zusammengefaßt werden in folgendes

5) **Hauptgesetz** für die Behandlung einer Gleichung: Ein Ausdruck, welcher durch eine beliebige Rechenoperation mit einer Seite der Gleichung verbunden ist, wird auf die andere Seite geschafft, indem man den Ausdruck durch die umgekehrte Rechnungsart mit dieser Seite verknüpft.

6) Ist die Gleichung eine zusammengesetzte, enthält sie namentlich Quotienten, Produkte und Wurzeln, so muß dieselbe zuerst durch Anwendung der arithmetischen Gesetze und der Transpositionsregeln auf die allgemeine

$$\text{Normalform:} \quad ax = b$$

zurückgeführt werden. In dieser Gleichung bezeichnet a die algebraische Summe der Koeffizienten von x und das Absolutglied b die algebraische Summe aller Glieder ohne x. Die Auflösung vorstehender Gleichung erhält man, wenn man beide Seiten durch a dividiert. Also ist:

$$x = b : a\,.$$

Beispiel. Gegeben:

$$9{,}45x-(0{,}945+9{,}45x)0{,}945=0{,}945x-(9{,}45-0{,}945x)9{,}45.$$

Auflösung. Statt die angezeigte Multiplikation auszuführen, dividieren wir die ganze Gleichung durch 0,945, so erhalten wir:

$$10x-(0{,}945+9{,}45x)=x-(9{,}45-0{,}945x)10.$$

Die Klammern gelöst und die Gleichung geordnet, liefert:

$$94{,}5-0{,}945=x+9{,}45x+945x-10x.$$

Vereinigt, giebt:

$$93{,}555=9{,}9x \text{ (Normalform)};$$

folglich:

$$x=93{,}555:9{,}9=9{,}45.$$

Nachweis, daß die Lösung richtig ist. Der für die Unbekannte gefundene Wert ist richtig, wenn durch Einsetzung dieses Wertes an Stelle von x in die gegebene Gleichung der Betrag beider Seiten gleich ist, mit anderen Worten: eine identische Gleichung entsteht. Da dies der Fall ist, so genügt der vorgelegten Gleichung der Wurzelwert $x=9{,}45$.*)

§ 88. Lehrsätze über Gleichungen; Auflösung durch Zerlegung in Faktoren.

1) **Lehrsatz:** Wenn eine unentwickelte Gleichung durch Einsetzung der Werte $x=0$ oder $x=\infty$ in eine identische übergeht, so wird derselben durch diese Werte genüge geleistet.

Beispiel. Der Gleichung:

$$\frac{x+6}{14-x}=\frac{x+18}{17-x}$$

genügen die beiden Werte $x_1=10$ und $x_2=\infty$.

*) Es empfiehlt sich, daß der Lernende nach jeder Auflösung einer Gleichung durch Einsetzung des erhaltenen Wertes für x in die ursprüngliche Gleichung den Nachweis liefere, ob der Wert die Gleichung in eine identische verwandelt.

2) **Lehrsatz: Tritt eine Unbekannte oder ein zusammengesetzter Ausdruck derselben als Faktor einer Gleichung auf, so liefert dieser Faktor, gleich Null gesetzt, eine besondere Bestimmungsgleichung für die Unbekannte.**

Nach § 40, 2 hat nämlich jedes Produkt, in welchem nur ein Faktor Null ist, den Wert Null. Mithin muß jeder Wert für x, welcher einen Faktor der Gleichung zu Null macht, die Ausdrücke auf beiden Seiten derselben sämtlich in Null verwandeln, also die Gleichung befriedigen.

Beispiele: $ax - bx = x$. Hier hat jedes Glied der Gleichung den Faktor x; es muß also $x = 0$ die Wurzel der Gleichung sein. Gleichungen wie die vorstehende haben überhaupt nur diese Auflösung.

Gegeben: $x^2 - 8x = x$. Da x als Faktor der Gleichung auftritt, so genügt $x_1 = 0$. Aus der durch Division erhaltenen Gleichung $x - 8 = 1$ folgt $x_2 = 9$. Zerlegt man die gegebene Gleichung in ein Produkt, so entsteht $(x - 9) \cdot x = 0$. Aus dieser Darstellung ergiebt sich klar, daß sowohl die Unbekannte x als auch der Ausdruck $x - 9$ ein Faktor der Gleichung ist. Man hat daher:

1) $x = 0$ und 2) $x - 9 = 0$, oder $x = 9$.

Giebt man der Gleichung:

$$5x - 40 = \tfrac{3}{4}(x - 8) + 8 - x$$

die Form:

$$5(x - 8) = \tfrac{3}{4}(x - 8) - (x - 8),$$

so erkennt man deutlich den gemeinschaftlichen Faktor $x - 8$ der ursprünglichen Gleichung. Setzt man $x - 8 = 0$, so entsteht die identische Gleichung $0 = 0$, und mithin muß der Wert $x = 8$ die vorgelegte Gleichung befriedigen. Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man obige Gleichung auf Null reduziert und die linke Seite durch ein Produkt aus algebraischen Zahlen darstellt. Man hat:

$$(x - 8)(5 - \tfrac{3}{4} + 1) = 0;$$

folglich:

$$x - 8 = \frac{0}{5 - \frac{3}{4} + 1} = 0 \quad \text{nach § 40, 3) Lehrsatz.}$$

Die Gleichung:

$$15x + 30 = 9x + 50$$

läßt sich leicht auf die Form:

$$5(3x - 10) = 3(3x - 10)$$

bringen. Der gemeinsame Faktor dieser Gleichung $3x - 10$ gleich Null gesetzt, liefert $x = 3\frac{1}{3}$. Warum ist es algebraisch unzulässig, die Gleichung:

$$5(3x - 10) = 3(3x - 10)$$

durch den Ausdruck $3x - 10$ zu dividieren?

Aus Vorstehendem ergiebt sich, daß man in manchen Fällen zur Auflösung einer Gleichung gelangt, wenn man dieselbe auf Null reduziert, die algebraische Summe der einen Seite in ein Produkt verwandelt (§ 47) und den Faktor, der x enthält, gleich Null setzt.

Gegeben: $5(x^2 - 25) = 3(x + 5)^2$.

Auflösung:

$$(x + 5)(2x - 40) = 0;$$

folglich:

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = -5.$$

§ 89. Behandlung von Gleichungen, in welchen Quotienten vorkommen.

1) Man schaffe die Brüche fort, indem man **alle** Glieder der Gleichung mit dem Hauptnenner der in ihr enthaltenen Quotienten multipliziert. Oder man giebt sämtlichen Gliedern der Gleichung denselben Nenner; läßt man alsdann letzteren fort, so ist die Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner vollzogen. Bei der Vereinigung der Quotienten ist wohl zu beachten, daß jede Zahl in solchen Quotienten, die das Vorzeichen — haben und deren Zähler algebraische Summen sind, nach Wegfall des Bruchstriches das entgegengesetzte Vorzeichen erhält.

Beispiele. Gegebene Gleichung:

$$\frac{2x+5}{3} - \frac{3x-8}{4} + \frac{5x-7\frac{1}{2}}{5} - \frac{7x+15}{6} + \frac{4x-8}{12} = 0.$$

Auflösung. Die Gleichung mit dem kleinsten Hauptnenner der Brüche multipliziert, liefert:

$$20(2x+5) - 15(3x-8) + 12(5x-7\tfrac{1}{2}) - 10(7x+15) + 5(4x-8) = 0.$$

Führt man die angedeuteten Multiplikationen aus, und ordnet und vereinigt in der erhaltenen Gleichung, so entsteht:

$$5x = 60; \quad \text{mithin} \quad x = 12.$$

Gegeben:

$$\frac{2x-3}{15} - \frac{4x-9}{20} = \frac{8x-27}{30} - \frac{16x-81}{24} - \frac{9}{40}.$$

Auflösung. Man bringe die Quotienten auf den Hauptnenner 120, so erhält man:

$$\frac{8(2x-3) - 6(4x-9)}{120} = \frac{4(8x-27) - 5(16x-81) - 3 \cdot 9}{120}.$$

Läßt man den Hauptnenner fort, führt die Multiplikation und Subtraktion aus, ordnet diese Gleichung und vereinigt, so ergiebt sich:

$$40x = 240; \quad \text{folglich} \quad x = 6.$$

2) In manchen Fällen ist es zweckmäßig, vor dem Wegschaffen der Brüche die Gleichung durch Vereinigung der vorhandenen ganzen Zahlen und solcher Brüche, die leicht im Kopfe zu addieren sind, zu kürzen. Dadurch werden oft erhebliche Rechenarbeiten erspart. Z. B.:

Gegeben:

$$\frac{16x+7}{24} + \frac{x-16}{177-9x} = \frac{2x+1}{3}.$$

Auflösung. Da $\frac{2x+1}{3} = \frac{16x+8}{24}$, so ist, wenn man den Ausdruck $\frac{16x+7}{24}$ transponiert und denselben mit $\frac{16x+8}{24}$ vereinigt:

$$\frac{x-16}{177-9x} = \frac{1}{24}; \text{ u. s. w.}$$

Gegeben:

$$\frac{9x+4}{5x-48}+\frac{4x-19}{51}=\frac{5x+32}{17}-\frac{11x+13}{51}.$$

Auflösung. Bringt man den Quotienten $\frac{5x+32}{17}$ auf den Divisor 51 und transponiert den zweiten Quotienten, so entsteht:

$$\frac{9x+4}{5x-48}=\frac{15x+96}{51}-\frac{11x+13}{51}-\frac{4x-19}{51}$$

oder:

$$\frac{9x+4}{5x-48}=\frac{15x-11x-4x+96-13+19}{51}=2.$$

Demnach ist:

$$9x+4=2(5x-48); \quad \text{folglich} \quad x=100.$$

3) Die Unbekannte x erscheint im Nenner, und zwar hat die Gleichung die Form:

$$\frac{a}{mx}+\frac{b}{nx}=c.$$

Gegeben:

$$1-\frac{2}{3x}+4-\frac{5}{6x}=7-\frac{8}{9x}+10-\frac{11}{12x}.$$

Um in dieser Gleichung die Brüche fortzuschaffen, könnte man dieselbe mit $36x$ multiplizieren oder sämtlichen Gliedern den Nenner $36x$ geben. Ordnet man die vorgelegte Gleichung und vereinigt, so entsteht:

$$\frac{8}{9x}+\frac{11}{12x}-\frac{2}{3x}-\frac{5}{6x}=12.$$

Diese Gleichung mit x multipliziert und die Brüche vereinigt, giebt: $\frac{11}{36}=12x$; folglich $x=\frac{11}{432}$.

4) Gewisse Quotientengleichungen fasse man als Proportion auf und wende zur Vereinfachung derselben den bezüglichen Lehrsatz aus der Proportionslehre (§ 74) an. Man sehe die Anmerkung über diesen Gegenstand Seite 216 und die dort ausgeführten Beispiele.

Gegeben: $\frac{x+m}{x-m}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$

Auflösung. Entwickelt man die Potenz des Quotienten rechts und wendet den 2) Lehrsatz § 74 auf die erhaltene Gleichung an, so entsteht:

$$\frac{x}{m} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}; \quad \text{also } x = m \cdot \frac{a^2 + b^2}{2ab}.$$

Gegeben: $\frac{ax + b}{ax - b} = \frac{m + n}{m - n}$.

Auflösung. Nach dem vorhin angewendeten Lehrsatze ist:

$$\frac{ax}{b} = \frac{m}{n}; \quad \text{folglich } x = \frac{b}{a} \cdot \frac{m}{n}.$$

§ 90. Behandlung von Wurzelgleichungen.

Erscheint in einer Gleichung die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen, so nennt man die Gleichung irrational. Eine Gleichung rational machen heißt, die Wurzelausdrücke (Irrationalitäten) aus derselben wegschaffen. Mittel, die Gleichung von den in ihr enthaltenen Wurzeln zu befreien, sind: a) Potenzierung der Gleichung mit dem Wurzelexponenten; b) die Einführung neuer Unbekannten in die Wurzelgleichung.

a) 1) Hauptregel: Befindet sich in einer Gleichung nur eine Wurzelgröße, so bringe man dieselbe auf eine Seite allein, isoliere die Wurzel und potenziere die so umgeformte Gleichung mit dem Wurzelexponenten.

Gegeben: $\sqrt{7x - 10} + 16 = 25$.

Auflösung.

$$\sqrt{7x - 10} = 9; \quad 7x - 10 = 81, \quad \text{also} \quad x = 13.$$

Man hüte sich vor dem Fehler, die einzelnen Glieder einer Gleichung zu potenzieren oder zu radizieren. (Vergleiche die Note am Schlusse des § 19.) Wollte man die vorgelegte Wurzelgleichung ohne vorherige Isolierung der Wurzel potenzieren, so bliebe letztere in der Gleichung.

2) Enthält die Gleichung zwei oder mehrere Wurzeln, so muß die unter 1) gegebene Regel wiederholt angewendet werden. Gleichungen dieser Art sind im allgemeinen quadratisch. Sollen

Gleichungen mit zwei Wurzeln vom ersten Grade sein, so muß x nach dem ersten Potenzieren beim Vereinigen der rationalen Glieder wegfallen. Diese Bedingung wird von allen Gleichungen von der Form:

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}=d$$ erfüllt

Gegeben: $2\sqrt{9x+1}-3\sqrt{4x-3}=1.$

Auflösung.

$$2\sqrt{9x+1}=3\sqrt{4x-3}+1.$$

Diese Gleichung ins Quadrat erhoben, giebt:

$$36x+4=36x-27+1+6\sqrt{4x-3}.$$

Vereinigt: $30=6\sqrt{4x-3};$

durch 6 dividiert:

$$5=\sqrt{4x-3}, \quad \text{also} \quad x=7.$$

Gleichungen von der Form:

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=\sqrt{ex+f}$$

sind im allgemeinen ebenfalls vom zweiten Grade. Wenn man in vorstehender Gleichung die Wurzeln beseitigt, so hat eine Seite der erhaltenen Endgleichung den Ausdruck $4ac\cdot x^2$, die andere $(e-a-c)^2\cdot x^2$. Damit also die quadratische Endgleichung in eine Gleichung ersten Grades übergeht, müssen die mit x^2 behafteten Größen wegfallen. Dies ist der Fall, wenn $4ac=(e-a-c)^2$ ist. Eine Gleichung wie die letzte, welche eine Bedingung zwischen den Koeffizienten einer Gleichung ausspricht, damit eine Gleichung höheren Grades sich in eine Gleichung niederen Grades verwandelt, heißt **Reducente**. Vorstehender Bedingung genügt die Gleichung:

$$\sqrt{2x+39}+\sqrt{8x-15}=\sqrt{18(x+3)}.$$

Auch Gleichungen, welche sich auf die Form:

$$\sqrt{ax^2+b}=cx+d$$

zurückführen lassen, sind im allgemeinen quadratischen Charakters.

Macht man diese Gleichung rational, so entsteht:

$$ax^2 + b = c^2x^2 + 2cdx + d^2.$$

Damit diese Gleichung in eine solche vom ersten Grade übergeht, muß $a = c^2$ sein. Dieser Bedingung genügt die Gleichung:

$$\sqrt{16x + 9} = 4x + 1.$$

Stehen beide Seiten einer Gleichung unter demselben Wurzelzeichen, so kann man dasselbe ohne weiteres auslassen. So folgt z. B. aus:

$$\sqrt{4x + 5} = \sqrt{7x - 13} \quad \text{sofort} \quad 4x + 5 = 7x - 13.$$

Ist der Wurzelexponent der einen Seite n und der andern Seite $2n$, so verwandele man die Wurzelausdrücke in gleichartige (§ 25) und lasse alsdann das Wurzelzeichen fort.

So hat man z. B. aus:

$$\sqrt{x + 6} = \sqrt[4]{x^2 + 30x - 18}$$

$$\sqrt[4]{(x + 6)^2} = \sqrt[4]{x^2 + 30x - 18};$$

$$(x + 6)^2 = x^2 + 30x - 18, \quad \text{also} \quad x = 3.$$

Hat die Gleichung die Form:

$$\sqrt{ax} + \sqrt{bx} = \sqrt{c},$$

so kann die doppelte Potenzierung vermieden werden. Verwandelt man die linke Seite in ein Produkt, indem man $\sqrt{x}$ absondert, so entsteht:

$$\sqrt{x}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{c}; \quad \text{mithin} \quad x = \frac{c}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}$$

Zum Beispiel:

$$\sqrt{64x} - \sqrt{25x} = 6; \quad 3\sqrt{x} = 6; \quad \sqrt{x} = 2, \quad \text{also} \quad x = 4.$$

b) Manche Gleichungen werden zweckmäßig durch Einführung einer neuen Unbekannten gelöst. Anstatt nämlich x direkt zu berechnen, betrachtet man vorläufig eine Verbindung dieser Größe als Unbekannte, bezeichnet diesen Ausdruck durch ein neues Zeichen, etwa y oder z, verwandelt die gegebene Gleichung in eine solche mit der neuen Unbekannten und

ermittelt deren Wert. Mit Hilfe des letzteren ist alsdann x selbst leicht zu bestimmen. Diese Methode gewährt nicht bloß bei Wurzelgleichungen, sondern auch zur Auflösung vieler andern Gleichungen wesentliche Vorteile.

Gegeben: $\sqrt{16x + 17} + 2\sqrt{4x + 14} = 13$.

Auflösung: Betrachtet man die erste Wurzel als Unbekannte und setzt:

$$\sqrt{16x + 17} = y, \quad \text{so wird} \quad 1) \quad x = \frac{y^2 - 17}{16}.$$

Wenn man diesen Wert an Stelle von x in die gegebene Gleichung einsetzt, so geht dieselbe in die folgende über:

$y + 2\sqrt{4 \cdot \frac{y^2 - 17}{16} + 14} = 9$. Hieraus folgt 2) $y = 5$.

Es ist also nach 1):

$$x = (25 - 17) : 16 = \tfrac{1}{2}.$$

§ 91. **Anwendung der Theorie der Bestimmungsgleichungen.**

Da die Theorie der Bestimmungsgleichungen aus gegebenen Größen andere, unbekannte finden lehrt, so läßt sich dieselbe mit großem Vorteil in der Größenlehre anwenden.

Wie jede gegebene Gleichung, so enthält auch jede eingekleidete Aufgabe bekannte und unbekannte Größen. Diese unbekannten Größen ermitteln, heißt eine Aufgabe auflösen. Das sogenannte „Denkrechnen" befaßt sich zwar mit der Auflösung eingekleideter Gleichungsaufgaben durch bloße Verstandesschlüsse. Häufig ist aber der Zusammenhang und das Verhältnis zwischen den gegebenen und den zu suchenden Größen so mannigfaltig und verwickelt, daß die Lösung auf gewöhnlichem, elementarem Wege höchst schwierig ist und erst nach langem „Kopfzerbrechen" gelingt, oder sogar gänzlich unmöglich ist. Die Kenntnis der Gleichungen setzt den Rechner in den Stand, solche Beispiele im allgemeinen auf eine leichte Weise zu berechnen. Man pflegt alle Aufgaben, zu deren Lösung man sich der Theorie der Gleichungen bedient, algebraische Aufgaben und

die Auflösung eine algebraische zu nennen. In der Regel führt das Rechnen mit Gleichungen viel schneller zum Ziele als jedes andere Verfahren. Die Gleichungen arbeiten aber auch dem Rechnen durch bloße Verstandesschlüsse, der Lösung ohne Hilfe der Algebra, wesentlich in die Hände, indem die gebildete Gleichung dem Rechner vielfach den Weg zeigt, auf welchem er durch Schlüsse und Folgerungen die Aufgabe auf elementarem Wege lösen kann.

Die angewandten Aufgaben, welche mit Hilfe der Gleichungen berechnet werden, erfordern von seiten des Rechners ein Zweifaches:

1) muß er imstande sein, aus den Bedingungen der Aufgabe die notwendigen Stücke für den Ansatz herauszufinden, dieselben in die arithmetische Zeichensprache zu übertragen und zu einer richtigen Gleichung miteinander zu verbinden;
2) muß er die nötige Sicherheit und Fertigkeit im Auflösen der Gleichungen besitzen.

Letztere Bedingung wird durch die Lösung zahlreicher gegebenen Gleichungen als erfüllt betrachtet, wenn die Auflösung eingekleideter Aufgaben beginnt. Die Fertigkeit, aus einer aufgestellten Gleichung die Unbekannte zu bestimmen vorausgesetzt, ist bei Auflösung angewandter Aufgaben die Herleitung des Ansatzes aus der Art der Einkleidung die Hauptsache. Über die Bildung der Gleichungen lassen sich keine allgemeinen Regeln aufstellen. Der Rechner hat in jedem einzelnen Falle zu prüfen und zu beurteilen, wie die Angaben und Bedingungen der Aufgabe zu verwerten sind. Zur Auffindung und Darstellung des Ansatzes dürften indes folgende Weisungen von Nutzen sein.

1) Die Hauptschwierigkeit zur Bildung der Gleichung ist die, zu erkennen, welche Zahl oder Größe sich auf zweifache Weise ausdrücken läßt. Man überlege daher, welche Größe in der Aufgabe durch zwei verschiedene Ausdrücke bezeichnet werden kann.

2) Während in der arithmetischen schulgemäßen Lösung von einem gegebenen Stücke der Aufgabe ausgegangen und durch eine Reihe von Schlüssen und Veränderungen der ge-

gebenen Zahlen die gesuchte Zahl gefunden wird, giebt die Algebra entweder auf die Frage der Aufgabe oder eine andere Unbekannte direkt die Antwort: die gesuchte Zahl wird mit x bezeichnet. Die Methode der algebraischen Auflösung ist daher analytisch. Mit dieser allgemeinen vorläufig unbekannten Größe x werden die gegebenen Größen (die Daten) der Aufgabe in Beziehung gebracht und man nimmt mit x alle arithmetischen Verbindungen vor, welche die Bedingungen der Aufgabe fordern, mit anderen Worten: man verfährt mit der Zahl x genau so, als wenn man mit einer durch Rechnung gefundenen bestimmten Zahl die Probe machen wollte. Gelangt man dadurch zu zwei Ausdrücken für die Unbekannte, von welchen eine Bedingung der Aufgabe aussagt, daß sie einander gleich sein müssen, so hat man nur nötig, diese gleichen Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen zu verbinden.

3) Vielfach kommt man einfacher und kürzer zum Ziele, wenn man nicht direkt die gesuchte Größe, sondern zunächst eine andere als Unbekannte ansieht und berechnet. Mit Hilfe des gewonnenen Ergebnisses bestimme man dann die gesuchte Größe. Man sehe § 93, Aufgabe 6.

4) Sollen mehrere Größen gesucht werden, so betrachte man doch nur eine als Unbekannte der zu bildenden Gleichung. Der Wert dieser Unbekannten dient zur Berechnung der übrigen Größen.

5) Alle in einer Aufgabe vorkommenden gleichartigen Größen müssen stets auf dieselbe Einheit zurückgeführt werden. Da nicht die Größen selbst, sondern nur ihre Maßzahlen den Gesetzen der Algebra unterworfen werden, so setzt man die Gleichungen durchgängig mit reinen Zahlen an.

Hinlängliche Fertigkeit im Auffinden des Ansatzes aus eingekleideten Gleichungsaufgaben kann nur durch andauernde Übung gewonnen werden, und wenn in irgend einem Fache, so gilt hier der Satz: „Übung macht den Meister" in seiner ganzen Wahrheit. Der Anfänger muß mit der Lösung zahlreicher leichter Aufgaben beginnen und stufenmäßig zu schwieri-

geren übergehen. Die empfehlenswerten Aufgabensammlungen von Heis, Bardey, Meier Hirsch u. a. bieten reichlichen Stoff zur Übung.*)

Bei jeder algebraischen Auflösung einer eingekleideten Aufgabe sind drei Stücke zu unterscheiden, welche der Anfänger sich wohl merken und in der schriftlichen Darstellung unterscheiden möge: 1) Herleitung des Ansatzes; 2) Lösung der aufgestellten Gleichung und 3) Beurteilung, Prüfung, ob der gefundene Wert der Unbekannten die Bedingungen der Wortaufgabe erfüllt. (Man sehe die Bemerkung zur 10) Aufgabe § 93.)

§ 92. Methoden zur Auflösung der eingekleideten Gleichungsaufgaben.

Eingekleidete algebraische Aufgaben können aufgelöst werden:

1) mit Hilfe der Algebra — algebraische Auflösung;

2) durch die alte indische Methode, die Regula falsi, d. h. die Regel vom falschen Satze;

3) mittels „geometrischer Versinnlichung";

4) durch bloße Verstandesschlüsse. Wir nennen diese Auflösungsart die reine arithmetische Auflösung. Zu dieser Auflösungsart gehört auch das bei den alten Indern schon bekannte „Verfahren der Umkehrung". Die arithmetische Lösung stellt an den Rechner von allen andern Methoden im allgemeinen die bedeutendsten Anforderungen. Das Finden der Lösung fordert scharfes Denken, sicheres richtiges Urteil und klares Schließen. Zur Übung der Urteilskraft und zur Weckung und Ausbildung des arithmetischen Scharfsinnes ist dies Verfahren ein ganz ausgezeichnetes Mittel. Die vollendete mustergültige Darstellung der Auflösung in Worten ist eine sehr nützliche Übung im richtigen, sprachlichen Ausdruck. Hinsichtlich des Bildungsgehaltes steht die unter 3) angegebene Methode der rein arithmetischen Lösung nahe. Die Auflösung algebrai-

*) Zum Selbstunterricht empfehlen wir Scholarius, Die algebraischen Gleichungen ersten und zweiten Grades. Ferd. Schöningh. Paderborn. In dieser Schrift sind über 460 algebraische Aufgaben ausführlich gelöst. Preis 1,60 M.

scher Aufgaben mit Hilfe geometrischer Darstellung ist ein wichtiges pädagogisches Mittel zur formalen Bildung, welches fast der geometrischen Konstruktion zur Seite gestellt werden kann. Der geistige Nutzen, welchen die Auflösung einer einzigen Gleichungsaufgabe, namentlich vom zweiten Grade, durch Anwendung von Raumgrößen gewährt, ist unstreitig höher anzuschlagen, als die Berechnung einer größeren Anzahl Gleichungssysteme nach einer mechanischen, starren Regel. Die algebraische Auflösung erfordert auch zum Auffinden des Ansatzes in vielen Fällen ein geschärftes Urteil. Allein für den Geübten ist sie immerhin viel leichter, als die arithmetische Lösung, weil an Stelle der unbekannten Größen sogleich Zeichen treten und die Algebra einen Teil der Denkarbeit übernimmt. In manchen Fällen führt die algebraische Behandlung leicht zu einer reinen arithmetischen Auflösung, wenn man an Stelle der Unbekannten x eine andere Bezeichnung, z. B. Teil, Einfaches, Ganzes, setzt und die Schlüsse, welche die Algebra durch die arithmetische Zeichensprache darstellt, in Worte einkleidet. Was endlich die Regel falsi zur Auflösung von algebraischen Aufgaben anlangt, so hat sie, vom Standpunkt der formalen Bildung aus betrachtet, nur geringen Wert. Das Schema ihrer Berechnung zur Auffindung der unbekannten Größen ist mit einer toten Maschine zu vergleichen, die bei richtiger Benutzung, ohne die Denkkraft des Rechners besonders in Anspruch zu nehmen, ein richtiges Ergebnis liefert.*)

*) Der geringe formale Wert der Regel falsi haftet mehr oder weniger auch anderen Auflösungsverfahren der Arithmetik und Algebra an, wenn, wie es bis zu Pestalozzis Zeit geschah, dem Lernenden fertige, unverstandene Regeln gegeben werden. Soll die Regel falsi kein toter, starrer Mechanismus sein, so muß das ihr zugrunde liegende Gesetz entwickelt, zum klaren Verständnis gebracht und begründet werden. An Stelle des starren Schemas der Berechnung muß die Auflösung in Worten treten. Aber selbst durch eine richtige didaktische Behandlung gewährt die Regel falsi bei weitem nicht den formalen Gewinn der anderen oben genannten Auflösungsmethoden, weil mit den in den verschiedenen Aufgaben gegebenen Zahlen stets nach einer bestimmten, festen Regel (§ 97) verfahren wird.

Dies dürfte auch der Grund sein, daß die Regel falsi aus dem Schulrechnen ausgeschlossen worden und fast gänzlich in Vergessenheit geraten ist. Die übrigen angeführten Auflösungsarten fordern dagegen bei jeder Aufgabe neue und in manchen Fällen angestrengte Denkarbeit. Nach der praktischen Seite hin, also wenn es darauf ankommt, die unbekannte Größe schnell und sicher zu finden, leistet die Falsirechnung zur Lösung solcher Aufgaben, zu denen man den Ansatz nicht recht finden kann, und die sich durch einfache Schlüsse nicht leicht lösen lassen, gute Dienste. Auch gewisse gegebene Gleichungen können ohne Zurückführung auf die Normalform durch die Regel vom falschen Satze zweckmäßig gelöst werden. Wegen ihrer praktischen Bedeutung verdient die indische Regel im Schulunterricht gewiß Beachtung. In neuerer Zeit hat diese Rechnung auch von seiten hervorragender Algebristen volle Würdigung erfahren.*)

Dem Lernenden ist sehr zu empfehlen, von einer Reihe Gleichungsaufgaben verschiedene Auflösungen, namentlich auch neben der algebraischen Behandlung die arithmetische und die Lösung mittels geometrischer Versinnlichung selbständig zu ersinnen und sorgfältig und klar in Worten wiederzugeben. Eine einzige Aufgabe gründlich durchdacht und mannigfach gelöst, hat einen weit größeren geistigen Gewinn als die oberflächliche Behandlung vieler Beispiele.**)

---

*) Schon Kästner sagt in seiner „Rechenkunst" 1786: „Das Angeführte wird zeigen, daß diese so berühmte Regel falsi doch noch verdient, gekannt zu werden, wenngleich man sie jetzt nicht mehr braucht."

**) Im Unterricht gewährt die mehrfache Behandlung algebraischer Aufgaben eine angemessene, angenehme Abwechselung, sie arbeitet der Ermüdung entgegen, belebt den Unterricht und nötigt den Lernenden, die Aufgaben von verschiedenen Gesichtspunkten aus aufzufassen. — „Eine Anzahl von Lösungen einer Aufgabe ist als zweckmäßig und förderlich zu bezeichnen. Für den Anfänger, der meistens Mühe hat, eine einzige Auflösung zu finden, ist es lehrreicher, eine Aufgabe möglichst vielseitig zu betrachten, als viele oberflächlich." Bardey. — „Durch den anzustellenden Vergleich zwischen beiden Auflösungsarten erlangt der Schüler erst eigentliche Gewandtheit in dergleichen geistigen Operationen." Sachs.

§ 93. Algebraische Auflösung eingekleideter Gleichungsaufgaben.

1) Aufgabe. Dividiere ich eine gewisse Zahl durch $\frac{2}{5}$, addiere zu dem erhaltenen Quotienten 18, subtrahiere von dieser Summe $\frac{3}{4}$ der gedachten Zahl und noch 24, so erhalte ich 15. Welches ist die gedachte Zahl?

Auflösung. Die gedachte Zahl heiße vorläufig x. Dieselbe durch $\frac{2}{5}$ dividiert, giebt $x : \frac{2}{5} = 2\frac{1}{2}x$; hierzu 18 addiert, liefert $2\frac{1}{2}x + 18$. Von dieser Summe soll $\frac{3}{4}$ der gedachten Zahl und noch 24, also $\frac{3}{4}x + 18$, subtrahiert werden, und nach Bedingung der Aufgabe das Ergebnis die Zahl 15 sein; mithin besteht die Gleichung:

$$2\tfrac{1}{2}x + 18 - (\tfrac{3}{4}x + 24) = 15.$$

Hieraus x bestimmt, liefert $x = 12$. Die gedachte Zahl heißt also 12.

2) Aufgabe. Wenn man $\frac{4}{5}$ einer Summe Geldes um 15 ℳ vermehrt, so kommt ebenso viel heraus, als wenn man $\frac{2}{3}$ derselben Summe von 81 ℳ wegnimmt. Wie groß ist die Summe Geldes?

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchte Anzahl ℳ mit x, so muß laut Bedingung der Aufgabe die Gleichung bestehen:

$$\tfrac{4}{5}x + 15 = 81 - \tfrac{2}{3}x.$$

Aus dieser Gleichung x entwickelt, giebt $x = 45$. Folglich betrug die gesuchte Summe Geldes 45 ℳ.

3) Aufgabe. Als A einst dem B gegenüber prahlte, eine gewisse Summe Geldes zu besitzen, erwiderte B: Ich kenne deinen ganzen Reichtum; du müßtest 1000 ℳ reicher sein, als du wirklich bist, um nur ein Viertel von der Summe zu besitzen, deren du dich gerühmt. Hätte ich den Betrag, den du zu viel angegeben hast, so würde ich dir ein Sechstel davon schenken, und dennoch zweimal so reich sein, als du alsdann besäßest. Wie groß war a) der angebliche, b) der wirkliche Reichtum des A?

Auflösung. Der wirkliche Reichtum von A betrage x ℳ, so war der angebliche $4(x + 1000)$ ℳ, und A hat sein Vermögen $4(x + 1000)$ ℳ $- x$ ℳ $= 3x + 1000$ ℳ zu hoch angegeben. Zufolge Bedingung der Aufgabe heißt der Ansatz:

$$\frac{5}{6}\left(3x + 4000\right) = 2\left(x + \frac{3x + 4000}{6}\right).$$

Aus dieser Gleichung erhält man $x = 4000$. A besaß also wirklich 4000 ℳ, während er sein Vermögen auf

$$4 \cdot 5000 \text{ ℳ} = 20\,000 \text{ ℳ}$$

angegeben hatte.

4) Aufgabe. Am Vormittage eines 20 Stunden langen Sommertages fragte ein Student math., wie viel die Uhr geschlagen habe. Er bekam zur Antwort: Wenn du die verflossenen Stunden dieses Tages von den kommenden abziehst, so bleibt gerade so viel übrig, als es jetzt geschlagen hat. Wie viel Uhr hatte es geschlagen?

Auflösung. Die Uhr habe $x$mal geschlagen, so sind:

$$x - 12 + 10 \text{ Std.} = x - 2 \text{ Std.}$$

vom Tage verflossen und der Tag dauert noch:

$$20 - (x - 2) \text{ Std.}$$

Es ist daher:

$$20 - (x - 2) - (x - 2) = x; \quad \text{folglich} \quad x = 8.$$

5) Aufgabe. Wenn 400 ℳ in 6 Jahren und 500 ℳ in $3\frac{1}{2}$ Jahren zusammen 178 ℳ Zinsen bringen, und das letztere Kapital $\frac{1}{2}$ Prozent niedriger aussteht als das erste, wie viel Zinsen bringt dann jedes Kapital?

Auflösung a). Bringt das erste Kapital x ℳ Zinsen, so trägt das zweite $178 - x$ ℳ. Das erste Kapital steht also zu $\frac{100 \cdot x}{400 \cdot 6}$ und das zweite zu $\frac{100(178 - x)}{500 \cdot 3\frac{1}{2}}$ Prozent aus. Da die Differenz des Prozentsatzes $\frac{1}{2}$ beträgt, so ist:

$$\frac{100 \cdot x}{400 \cdot 6} - \frac{100(178 - x)}{500 \cdot 3\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}; \quad x = 108.$$

Auflösung b). Man berechne zuerst den Zinsfuß des ersten Kapitals. Bezeichnet man denselben mit x, so hat man:

$$\frac{6 \cdot 400 \cdot x}{100} + \frac{3\frac{1}{2} \cdot 500 \cdot (x - \frac{1}{2})}{100} = 178; \quad \text{folglich} \quad x = 4\frac{1}{2}.$$

6) Aufgabe. Ein Schuldner hat die rückständigen Zinsen von 200 ℳ zu 5 Prozent für 1 Jahr mehr zu zahlen als für 250 ℳ, die er zu 4 Prozent geliehen hat. Die gesamten Zinsen betragen 50 ℳ. Wie viel kommt davon auf jedes Kapital?

Auflösung a). Da 200 ℳ zu 5 Prozent in einem Jahre ebensoviel Zinsen bringen wie 250 ℳ zu 4 Prozent, nämlich 10 ℳ, so ergiebt sich, wenn man die rückständigen Zinsen des zweiten Kapitals mit x bezeichnet, sofort die Gleichung:

$$x + x + 10 = 50; \quad \text{mithin} \quad x = 20.$$

Auflösung b). Bezeichnet man die Anzahl Jahre, für welche die Zinsen des zweiten Kapitals rückständig sind, mit x, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{250 \cdot 4 \cdot x}{100} + \frac{200(x + 1)5}{100} = 50; \quad x = 2.$$

Also sind vom zweiten Kapitale 20 ℳ und vom ersten 30 ℳ Zinsen rückständig.

7) Aufgabe. Von einer Summe Geldes erhält A vorab $3\frac{1}{2}$ ℳ und von dem Übrigen den vierten Teil. Von dem jetzt bleibenden Reste bekommt B im voraus 6 ℳ und den vierten Teil dessen, was noch übrig ist. C erhält von dem jetzt noch vorhandenen Reste $7\frac{1}{2}$ ℳ und $\frac{1}{4}$ des Übrigen. D bekommt von dem dritten Reste erst 9 ℳ und dann $\frac{1}{4}$ dessen, was übrig bleibt. E erhält vom vierten Reste vorab 11 ℳ und $\frac{1}{4}$ des Übrigen. Von der ganzen Summe sind jetzt noch 12 ℳ übrig. Wie groß ist diese Summe und wie viel hat jeder erhalten?

Auflösungen. Die einfachste Lösung bietet die Operati der Umkehrung, welche mit dem letzten Reste beginnt und na und nach vorwärtsschreitend, die andern Glieder bestimn (Man sehe § 95.) Wollte man hier die unbekannte Summ

mit x bezeichnen und direkt den Ansatz für x aufstellen, so erhielte man folgende Gleichung:

$$x = 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}(x - 3\tfrac{1}{2}) + 6 + \tfrac{1}{4}(x - [3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}(x - 3\tfrac{1}{2})] - 6) \text{ ꝛc.}$$

Die vollständige Gleichung würde einen großen Umfang gewinnen.

Nicht viel einfacher gestaltet sich die algebraische Auflösung, wenn man die jedesmaligen Reste in folgender Weise berechnet: A erhält vorab $3\tfrac{1}{2}$ ℳ und $\tfrac{1}{4}(x - 3\tfrac{1}{2})$ ℳ, d. i. $\tfrac{1}{4}x + 2\tfrac{5}{8}$ ℳ. Rest: $x - \left(\frac{x}{4} + 2\tfrac{5}{8}\right) = \tfrac{3}{4}x - 2\tfrac{5}{8}$. Hiervon erhält B zunächst 6 ℳ und von dem Reste $\tfrac{1}{4}$; dies liefert:

$$\tfrac{1}{4}(\tfrac{3}{4}x - 2\tfrac{5}{8} - 6) + 6 = \tfrac{3}{16}x + 3\tfrac{27}{36} \quad \text{u. s. w.}$$

Der einfachste algebraische Weg wird wohl folgender sein, der dem Umkehrungsverfahren mehr entspricht. Man bezeichne die Summe mit x, den Rest, der bleibt, nachdem A seinen Teil hat, mit m und die Reste, welche entstehen, nachdem B, C und D befriedigt sind, mit n, p und q. Nun berechnet man rückwärtsschreitend die Werte von q, p und n und endlich x sehr leicht, wie aus folgendem zu ersehen ist.

1) $q = 11 + \frac{q - 11}{4} + 12$; folglich $q = 27$.

Also erhielt E 27 ℳ − 12 ℳ = 15 ℳ.

2) $p = 9 + \frac{p - 9}{4} + 27$; mithin $p = 45$.

Demnach erhielt D 45 ℳ − 27 ℳ = 18 ℳ.

3) $n = 7\tfrac{1}{2} + \frac{n - 7\frac{1}{2}}{4} + 45$; folglich $n = 67\tfrac{1}{2}$.

C erhielt also $67\tfrac{1}{2}$ ℳ − 45 ℳ = $22\tfrac{1}{2}$ ℳ.

4) $m = 6 + \frac{m - 6}{4} + 67\tfrac{1}{2}$; mithin $m = 96$.

B erhielt demnach 96 ℳ − $67\tfrac{1}{2}$ ℳ = $28\tfrac{1}{2}$ ℳ.

5) Endlich $x = 3\tfrac{1}{2} + \frac{x - 3\frac{1}{2}}{4} + 96$;

hieraus ergiebt sich: $x = 131\tfrac{1}{2}$.

Die ganze Summe betrug also $131\tfrac{1}{2}$ ℳ.

A erhielt $3\tfrac{1}{2}$ ℳ + $\tfrac{1}{4}$ von 128 ℳ, d. i. $35\tfrac{1}{2}$ ℳ.

8) Aufgabe. Ein Oberst wollte sein Regiment in ein Quadrat stellen. Er versuchte es auf zwei Arten. Das erste Mal blieben ihm 39 Mann übrig, das zweite Mal, als er die Seite des Quadrates um 1 Mann vergrößerte, fehlten ihm zur Bildung des Quadrates 50 Mann. Wie stark war das Regiment?

Auflösung a). Bezeichnet man die Anzahl Mann, welche der Oberst beim ersten Versuche in eine Reihe stellte, mit x, so war das Regiment $x^2 + 39$ Mann stark. Bei der zweiten Aufstellung ergab sich die Stärke des Regimentes als:

$$(x + 1)^2 - 50 \text{ Mann.}$$

Es ist daher:

$$x^2 + 39 = (x + 1)^2 - 50; \quad \text{folglich} \quad x = 44.$$

Das Regiment zählte also $44^2 + 39$ Mann $= 1975$ Mann.

Auflösung b). Die vorige Lösung zeigt, wie von der zweckmäßigen Wahl der Unbekannten die einfache Rechnung abhängt. Wollte man vorstehende Aufgabe direkt lösen, so würde sich das folgende umständliche Verfahren ergeben.

Das Regiment sei x Mann stark, so lautet der Ansatz:

$$\sqrt{x - 39} = \sqrt{x + 50} - 1.$$

Erhebt man beide Seiten dieser Gleichung ins Quadrat, so erhält man:

$$x - 39 = x + 50 - 2\sqrt{x + 50} + 1.$$

Reduziert man diese Gleichung, schafft die Wurzelgröße allein auf eine Seite und dividiert die neue Gleichung durch 2, so entsteht:

$$45 = \sqrt{x + 50}.$$

Diese Gleichung ins Quadrat erhoben, giebt:

$$2025 = x + 50; \quad \text{also} \quad x = 1975.$$

Die Auflösung durch geometrische Versinnlichung sehe man in § 94, mittels der Regel falsi in § 96.

9) Aufgabe. a) Um welche Zeit nach 12 Uhr stehen die Uhrzeiger zum ersten Male übereinander? b) Wann nach 3 Uhr bilden die Zeiger den nächsten rechten Winkel? c) Um

welche Zeit nach 6 Uhr bilden die Zeiger zum ersten Male wieder einen gestreckten Winkel?

Auflösungen. a) Der Stundenzeiger möge bis zur Deckung mit dem Minutenzeiger x Raumminuten zurücklegen, so hat letzterer $60 + x$ Raumminuten zu durchlaufen. Da der Minutenzeiger eine 12mal so große Geschwindigkeit als der Stundenzeiger hat, so ist:

$$12x = x + 60; \quad \text{folglich} \quad x = 5\tfrac{5}{11} \text{ (Minuten).}$$

b) Bliebe der kleine Zeiger auf 3 stehen, so würde er mit dem Minutenzeiger nach 30 Minuten wieder einen rechten Winkel bilden. Bis zur Bildung des letzteren rückt aber der Stundenzeiger ein Zeitteilchen weiter, das x heißen möge. Der große Zeiger muß also $30 + x$ Raumminuten zurücklegen. Man hat daher:

$$12x = x + 30; \quad \text{mithin} \quad x = 2\tfrac{8}{11}.$$

c) Beide Zeiger können erst nach 7 Uhr in gerader Linie stehen. Bezeichnet man die Anzahl Raumminuten, um welche der Stundenzeiger von der Ziffer 7 aus bis zur Bildung eines gestreckten Winkels mit dem Minutenzeiger fortrücken muß, mit x, so hat letzterer noch $x + 5$ Raumminuten zu machen. Da der Minutenzeiger 12mal so geschwind läuft als der Stundenzeiger, so ist:

$$12x = x + 5; \quad \text{folglich} \quad x = \tfrac{5}{11}.$$

Die Zeiger bilden also $5\tfrac{5}{11}$ Minuten nach 7 Uhr einen gestreckten Winkel.

10) Aufgabe. Der Vater sei 48 und der Sohn 20 Jahre alt. Vor wie viel Jahren war der Vater doppelt so alt als der Sohn?

Auflösung. Die gesuchte Anzahl Jahre sei x, so ist:

$$48 - x = 2(20 - x); \quad \text{hieraus folgt} \quad x = -8.$$

Der negative Wert der Unbekannten deutet an, daß die fragliche Anzahl Jahre nicht in der Vergangenheit liegt, sondern in den entgegengesetzten Zeitraum, also in di

Zukunft, fällt. Hier und in manchen anderen Fällen deutet der negative Wert eine Auflösung in einem anderen, der Frage entgegengesetzten Sinne an. Die Algebra tritt gleichsam belehrend auf, indem sie sagt, daß eine irrtümliche Annahme in der Aufgabe enthalten ist. Ändert man die irrige Voraussetzung, indem man z. B. die Frage nach dem Fortschreiten in Zeit und Raum, nach dem Vermögen ꝛc. in die Frage nach dem Rückschreiten in Zeit und Raum, bezw. nach Schulden u. s. w. und umgekehrt, umwandelt, so wird das Ergebnis für x eine natürliche Zahl. In vorliegender Aufgabe muß also die Frage lauten: Nach wie viel Jahren ist der Vater doppelt so alt als der Sohn? Setzt man in dem Ansatze $+x$ statt $-x$, so ergiebt sich $x = 8$.

Wenn überhaupt nach Abschluß einer Rechnung es ratsam erscheint, die Richtigkeit des Resultates zu prüfen, so ist bei der algebraischen Auflösung in manchen Fällen die Probe durchaus notwendig. Der aus dem Ansatze berechnete negative Wert für x genügt zwar der aufgestellten Gleichung, also in algebraischer Hinsicht, aber nicht den Bedingungen der Wortaufgabe. Diese Erscheinung ist aber nicht als ein Mangel der algebraischen Auflösung, sondern geradezu als ein Vorteil derselben aufzufassen. Es ist alsdann Sache des Rechners, die Probe anzustellen und zu beurteilen, unter welcher Bedingung der gefundene Wurzelwert für die eingekleidete Aufgabe zu verwenden ist. Namentlich bei den später behandelten eingekleideten Aufgaben, welche auf quadratische Gleichungen führen, ist das Vorzeichen der für die Unbekannte gefundenen Zahlenwerte bei der anzustellenden Probe stets zu berücksichtigen.

§ 94. Auflösung algebraischer Aufgaben durch geometrische Versinnlichung; reine arithmetische Lösung.

Algebraische Aufgaben, deren Lösung eine Reihe von nicht gerade leichten, abstrakten Schlüssen erfordert, können durch Anwendung räumlicher Darstellungen anschaulich gelöst werden.

Vergegenwärtigen wir uns, daß bei Anwendung dieser

Lösungsart die abstrakten Zahlen ohne Verbindung mit Operationszeichen durch die Längen von Strecken, das Produkt zweier Zahlen durch das Rechteck und im besonderen Falle durch das Quadrat dargestellt und veranschaulicht wird.

Wir zeigen an einigen Beispielen, wie die einfachsten, bekanntesten Raumgebilde, nämlich Strecke, Rechteck und Quadrat zur Erläuterung und Veranschaulichung der Auflösung benutzt werden können.

a) Benutzung der Strecke. Als Ausgangspunkt einer Gruppe von Aufgaben, die durch Anwendung einer Strecke gelöst werden, nehmen wir

1) Aufgabe. Ein Beamter, dessen Gehalt verdoppelt worden ist, erhält jetzt jährlich ebensoviel über 900 ℳ, als ihm bisher an 900 ℳ gefehlt hat. Wieviel beträgt jetzt sein jährliches Einkommen?

Um den Wert der Auflösung durch „geometrische Versinnlichung" recht zu erkennen, löse man die Aufgabe arithmetisch, hierauf mittels Gleichung, also algebraisch, und schließlich mit Hilfe geometrischer Darstellung.

α) Die arithmetische Lösung könnte etwa auf folgende Weise geschehen:

Nach der Aufgabe ist das ursprüngliche Gehalt verdoppelt worden. Die Zulage zerfällt in zwei gleiche Teile; der erste Teil ergänzt das anfängliche Gehalt zu 900 ℳ, der zweite Teil übersteigt 900 ℳ um denselben Betrag. Da beide Teile gleich der ganzen Zulage, also auch gleich dem ursprünglichen Gehalt sind, so beträgt ein Teil die Hälfte dieses Gehaltes. Das Anfangsgehalt und die Hälfte desselben, also $1\frac{1}{2}$ mal das ursprüngliche Einkommen ist nach der Aufgabe gleich 900 ℳ. Folglich beträgt das ursprüngliche Gehalt:

$$900\ ℳ : 1\tfrac{1}{2} = 600\ ℳ$$

und das jetzige Einkommen:

$$2 \times 600\ ℳ = 1200\ ℳ.$$

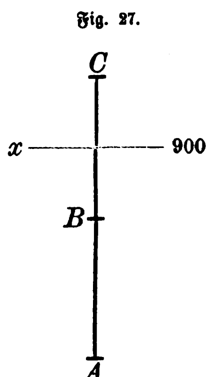
β) Algebraische Auflösung. Wir bezeichnen die Zahl, welche sein ursprüngliches Gehalt in Mark ausdrückt, vorläufig

mit x. Alsdann wird das Doppelte dieses Gehaltes durch $2x$ bezeichnet. Der Betrag, um welchen $2x$ die Zahl 900 übersteigt, wird durch die Differenz $2x - 900$ dargestellt, und der Teil, welcher das ursprüngliche Gehalt zu 900 ℳ ergänzt, oder um welchen 900 ℳ das Anfangsgehalt überschreitet, durch die Differenz $900 - x$ angezeigt. Nach Angabe der Aufgabe haben beide Differenzen denselben Wert. Folglich besteht die Gleichung:
$$2x - 900 = 900 - x.$$

Hieraus x bestimmt, giebt $x = 600$ und folglich $2x = 1200$.

γ) Lösung durch zeichnerische Darstellung.*) Die Zahl, welche das ursprüngliche Gehalt des Beamten in Mark angiebt, sei durch die Strecke AB veranschaulicht. Alsdann wird die Zahl, welche durch Verdoppelung des Anfangsgehaltes herauskommt, durch die doppelt so große Strecke AC versinnlicht.

Fig. 27.



Die Zahl 900 hat nach der Aufgabe die Eigenschaft, daß sie ebenso hoch über dem ursprünglichen Gehalt, als unter dem Doppelten des letzteren liegt.

Auf unsere Zeichnung übertragen, heißt das: Auf der Strecke AC liegt zwischen B und C ein Punkt x ebenso hoch über B, als unter C. Um diese Eigenschaft zu erfüllen, muß der Punkt offenbar in der Mitte der Strecke BC liegen. Folglich stellt Ax die Zahl 900 vor, und es fragt sich: Welche Zahl wird durch die Strecke AC veranschaulicht?

Nach der Zeichnung ist:
$$Ax = 1\tfrac{1}{2} \cdot AB; \qquad AC = 2 \cdot AB.$$

Also $1\tfrac{1}{2} \cdot AB = 900$; mithin:
$$AB = 900 : 1\tfrac{1}{2} = 600 \quad \text{und daher} \quad AC = 1200.$$

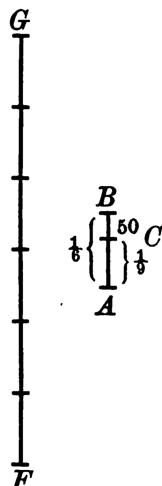
Vergleicht man die erste, rein arithmetische Lösung mit der letzteren,

*) Der Lernende möge die erläuternden Zeichnungen möglichst richtig und sauber anfertigen, und die Lösung ausführlich und sorgfältig schriftlich und mündlich wiedergeben.

so ersieht man, daß der eigentliche Gang oder Verlauf der beiden Verfahren derselbe ist. Allein die letztere Lösung hat in der räumlichen Darstellung unstreitig den Vorzug der Anschaulichkeit. Die Zahlen, welche in der Schlußreihe der rein arithmetischen Auflösung inbetracht kommen, sind hier durch wirkliche Größen, durch Strecken, dargestellt. Hier wird dem Lernenden die gesuchte Zahl gleich zu Anfang der Lösung im Gewande eines räumlichen Gebildes vor Augen geführt, dem Schüler etwas Bekanntes an Stelle des Unbekannten gegeben. Die Veränderungen, welche zum Zwecke der Auflösung mit den Zahlen vorgenommen werden müssen, werden vor den Augen des Lernenden an Strecken wirklich vollzogen, und die abstrakten Schlüsse der rein arithmetischen Lösung sind hier in wirkliche, sinnlich wahrnehmbare Operationen umgesetzt, der Verlauf der Auflösung ist anschaulich und klar, der Weg durchaus unzweideutig.

In ähnlicher Weise kann das folgende Beispiel gelöst werden: Es soll eine Zahl gesucht werden, deren Fünffaches ebensoviel über 20, als die Zahl selbst unter 20 ist.

2) Aufgabe. In einem Beutel ist 6mal so viel Geld enthalten als in einem andern. Man nimmt aus letzterem 50 ℳ heraus, und nun ist im ersteren Beutel 9mal so viel als in dem zweiten. Wie viel ℳ enthielt jeder Beutel anfangs?



Auflösung mittels geometrischer Versinnlichung. Die gesuchte Anzahl Mark, welche der zweite Beutel enthielt, werde durch die Strecke AB versinnlicht. Alsdann ist die Strecke $FG = 6 \cdot AB$ ein Bild der Zahl, welche die Summe Geldes im ersten Beutel bezeichnet. Nachdem man aus dem zweiten Beutel 50 ℳ genommen hat, beträgt sein Inhalt nur $\frac{1}{9}$ vom ersten Beutel. Schneiden wir auf der Strecke AB von B aus ein Stückchen BC ab, so versinnlicht BC erstens die Zahl 50, und zweitens muß BC nach der Aufgabe $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ der Strecke FG, oder $\frac{1}{3}$ von AB sein. Folglich bezeichnet AB die Zahl $3 \cdot 50 = 150$ und FG die Zahl $6 \cdot 150 = 900$. Der erste Beutel enthielt also 900 ℳ und der andere 150 ℳ.

Der Vorzug der Anschaulichkeit der Auflösung mittels geometrischer Darstellung vor der rein arithmetischen tritt bei der folgenden Aufgabe deutlich hervor.

3) Aufgabe. Um alle meine Ausgaben bestreiten zu können, müßte ich ein jährliches Einkommen von 1620 ℳ haben; hierzu fehlt mir aber noch ein Beträchtliches. Wären meine Einkünfte $3\frac{1}{2}$mal so groß, als sie wirklich sind, so würde ich nicht allein meine Ausgaben bestreiten können, sondern jährlich noch so viel übrig behalten, als mir jetzt fehlt. Wie hoch belaufen sich meine Einkünfte?

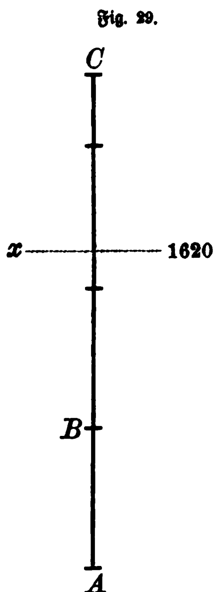


Fig. 29.

Lösung. Die Strecke AB bezeichne die Zahl, welche die Höhe des Gehaltes in Mark angiebt; das $3\frac{1}{2}$fache des letzteren wird durch die Strecke AC versinnlicht.

Nach der Aufgabe beträgt der Überschuß des $3\frac{1}{2}$fachen des Gehaltes ebensoviel über 1620 ℳ, als das Gehalt selbst unter dieser Summe liegt.

Diese Angabe lautet geometrisch gedeutet: Punkt C der Strecke AC liegt ebenso hoch über einem gesuchten Punkt x, als B unter x liegt. Der Punkt x liegt also in der Mitte von BC. Nach der Konstruktion ist $Ax = 2\frac{1}{4} \cdot AB$; $2\frac{1}{4} \cdot AB$ veranschaulicht aber die Zahl 1620, mithin AB, $1620 : 2\frac{1}{4} = 720$. Das gesuchte Einkommen beträgt also 720 ℳ.

b) Anwendung von Rechteck und Quadrat. Manche Aufgaben, zu deren Lösung man sich in der Regel der Gleichungen bedient, und deren reine arithmetische (elementare) Behandlung nicht unerhebliche Schwierigkeiten bietet, liefern uns ein recht dankbares Feld für das graphische Verfahren. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich sofort, wenn wir von einigen Beispielen die algebraische und die Lösung durch

„zeichnerische Darstellung“ geben und beide miteinander vergleichen.

4) Gegeben sei Aufgabe 8) § 93.

α) Algebraische Lösung. Bezeichnet man die Anzahl der Mannschaften mit x, so stehen auf einer Seite des ersten Quadrates $\sqrt{x-39}$ und auf einer Seite des zweiten Quadrates $\sqrt{x+50}$ Mann. Da der letztere Wurzelausdruck gemäß Bedingung der Aufgabe um 1 größer als der erstere ist, so hat man die Gleichung:

$$\sqrt{x-39} = \sqrt{x+50} - 1 .$$

Die Berechnung des Wertes der Unbekannten x erfordert die Beseitigung der Wurzelgrößen aus der Gleichung. Dies geschieht dadurch, daß man beide Seiten der gegebenen Gleichung ins Quadrat erhebt, die erhaltene Gleichung so ordnet, daß auf der einen Seite die rationalen Glieder und auf der anderen die irrationalen Größen stehen, und diese Gleichung abermals quadriert.

Dieses doppelte Erheben einer Gleichung mit zwei mehrgliedrigen Wurzelausdrücken ist eine für den Anfänger nicht gerade leichte rechnerische Arbeit, und dieselbe muß mit Vorsicht ausgeführt werden. (Vergleiche die Auflösung § 93.)

Erheblich einfacher und weit anschaulicher gestaltet sich die graphische Behandlung dieser Aufgabe.

β) Auflösung mittels geometrischer Versinnlichung. Es veranschauliche die Strecke AB die Anzahl Mannschaften, die bei der ersten Aufstellung auf einer Seite, und die Strecke AC die Anzahl Soldaten, welche beim zweiten Versuch auf einer Seite des Quadrates stehen. Beschreibt man über den Strecken AB und AC Quadrate, so entsteht die bekannte Figur, welche überhaupt die Bestandteile des Quadrates über der Summe zweier Strecken sichtbar vor Augen führt. (Fig. 9, Seite 52.) Da bei der zweiten Aufstellung nicht nur die 39 Mann, welche bei der ersten übrig bleiben, verwendet werden, sondern außerdem noch 50 Mann nötig sind, um das zweite Quadrat voll zu machen, so sind offenbar zur Besetzung

des größeren Quadrates 89 Soldaten mehr erforderlich, als bei der ersten Aufstellung.

Die Strecke BC versinnlicht die Zahl 1; also beträgt das Quadrat des Zusatzes $DGHJ = 1$. Die beiden gleichen Rechtecke veranschaulichen $89 - 1 = 88$; ein Rechteck bezeichnet mithin die Zahl 44. Da die Breite eines Rechtecks $= 1$ ist, so beträgt die Länge etwa $BE = 44$. Die Seite AB des ersten Quadrates veranschaulicht also die Zahl 44; das Quadrat selbst die Zahl $44^2 = 1936$. Rechnet man hierzu die 39 Mann, welche bei der ersten Aufstellung übrig bleiben, so ergiebt sich, daß das Regiment 1975 Mann stark war.

Die algebraische Lösung entspricht dem letzteren Verfahren, wenn man die Anzahl Mann auf einer Seite des ersten Quadrates als Unbekannte x annimmt.

§ 95. Die Methode der Umkehrung.

Das Verfahren der Umkehrung besteht darin, daß die Reihenfolge und die Art der Operationen, welche in der Aufgabe zur Bildung einer bekannten Zahl angegeben sind, geradezu umgekehrt werden. Die Methode der Umkehrung ist, wie die Regel vom falschen Satze, indischen Ursprungs. Der Inder Âryabhatta (geb. 476 n. Chr.) kennzeichnet dieselbe in seiner kurzen Weise folgendermaßen: „Multiplikationen werden Divisionen, Divisionen werden Multiplikationen; was Gewinn war wird Verlust, was Verlust war wird Gewinn; Umkehrung." Der Araber Beha-Eddin (1547—1622) sagt in seinem Rechenwerk „Essenz der Rechenkunst": „Bei diesem Verfahren thut man das Gegenteil von dem, was der Fragende verlangt; fordert er Verdoppelung, so halbiere; hat er addiert, so subtrahiere, hat er multipliziert, so dividiere; soll die Quadratwurzel ausgezogen werden, so erhebe ins Quadrat, und hat er letztere Operation verrichtet, so verfahre umgekehrt, indem du mit der letzten Angabe beginnst: dann erhältst du die Auflösung."

1) Auflösung der 7) Aufgabe in § 93 durch die Operation

der Umkehrung. Nachdem E vom vierten Reste vorab 11 ℳ genommen hat, bleibt eine gewisse Summe übrig. Hiervon nimmt er $\frac{1}{4}$; folglich bleiben $\frac{3}{4}$ derselben, und diese betragen 12 ℳ; der vierte Rest ist also:

$$\tfrac{4}{3} \cdot 12\,ℳ + 11\,ℳ = 27\,ℳ.$$

E erhält mithin:

$$27\,ℳ - 12\,ℳ = 15\,ℳ.$$

Der vierte Rest, 27 ℳ, ist geblieben, nachdem D vom dritten Rest 9 ℳ und dann $\frac{1}{4}$ des Übrigen genommen hat. Mithin sind $\frac{3}{4}$ von $(R_3 - 9)$ ℳ gleich 27 ℳ, und der dritte Rest beträgt:

$$\tfrac{4}{3} \cdot 27\,ℳ + 9\,ℳ = 45\,ℳ.$$

D bekommt:

$$45\,ℳ - 27\,ℳ = 18\,ℳ.$$

Durch noch dreimalige Wiederholung derselben Schlüsse gelangt man zur vollständigen Auflösung.

2) Aufgabe. Ein Vater bringt eine Anzahl Äpfel nach Hause und giebt dem ersten Kinde die Hälfte des ganzen Vorrates weniger 8 Äpfel, dem zweiten die Hälfte des Restes weniger 8 Äpfel, ebenso macht er es bei dem dritten und vierten; dem fünften giebt er die noch übrigen 20 Äpfel. Wie viel Äpfel hat der Vater verteilt?

Auflösung. Das vierte Kind erhält vom dritten Reste die Hälfte weniger 8 Äpfel; folglich bleiben die Hälfte des dritten Restes und 8 Äpfel für das fünfte Kind. Der dritte Rest muß daher $2(20 - 8)$ Äpfel gleich 24 Äpfel sein. Letztere blieben übrig, nachdem das dritte Kind vom zweiten Rest die Hälfte weniger 8 Äpfel erhalten hatte, es bleiben daher die Hälfte vom zweiten Reste und noch 8 Äpfel. Es ist daher $\frac{1}{2}$ vom zweiten Rest und 8 Äpfel gleich 24 Äpfel, und mithin beträgt dieser Rest $2(24 - 8)$ Äpfel oder 32 Äpfel. Wenn man dieselben Schlüsse noch zweimal anwendet, so erhält man 80 Äpfel. Die zu machenden Schlüsse kurz durch die arithmetische Zeichensprache angedeutet, giebt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 8\right) + 8\right] + 8\right) + 8 = 20.$$

Zukunft, fällt. Hier und in manchen anderen Fällen deutet der negative Wert eine Auflösung in einem anderen, der Frage entgegengesetzten Sinne an. Die Algebra tritt gleichsam belehrend auf, indem sie sagt, daß eine irrtümliche Annahme in der Aufgabe enthalten ist. Ändert man die irrige Voraussetzung, indem man z. B. die Frage nach dem Fortschreiten in Zeit und Raum, nach dem Vermögen 2c. in die Frage nach dem Rückschreiten in Zeit und Raum, bezw. nach Schulden u. s. w. und umgekehrt, umwandelt, so wird das Ergebnis für x eine natürliche Zahl. In vorliegender Aufgabe muß also die Frage lauten: Nach wie viel Jahren ist der Vater doppelt so alt als der Sohn? Setzt man in dem Ansatze $+x$ statt $-x$, so ergiebt sich $x = 8$.

Wenn überhaupt nach Abschluß einer Rechnung es ratsam erscheint, die Richtigkeit des Resultates zu prüfen, so ist bei der algebraischen Auflösung in manchen Fällen die Probe durchaus notwendig. Der aus dem Ansatze berechnete negative Wert für x genügt zwar der aufgestellten Gleichung, also in algebraischer Hinsicht, aber nicht den Bedingungen der Wortaufgabe. Diese Erscheinung ist aber nicht als ein Mangel der algebraischen Auflösung, sondern geradezu als ein Vorteil derselben aufzufassen. Es ist alsdann Sache des Rechners, die Probe anzustellen und zu beurteilen, unter welcher Bedingung der gefundene Wurzelwert für die eingekleidete Aufgabe zu verwenden ist. Namentlich bei den später behandelten eingekleideten Aufgaben, welche auf quadratische Gleichungen führen, ist das Vorzeichen der für die Unbekannte gefundenen Zahlenwerte bei der anzustellenden Probe stets zu berücksichtigen.

§ 94. Auflösung algebraischer Aufgaben durch geometrische Versinnlichung; reine arithmetische Lösung.

Algebraische Aufgaben, deren Lösung eine Reihe von nicht gerade leichten, abstrakten Schlüssen erfordert, können durch Anwendung räumlicher Darstellungen anschaulich gelöst werden.

Vergegenwärtigen wir uns, daß bei Anwendung dieser

Lösungsart die abstrakten Zahlen ohne Verbindung mit Operationszeichen durch die Längen von Strecken, das Produkt zweier Zahlen durch das Rechteck und im besonderen Falle durch das Quadrat dargestellt und veranschaulicht wird.

Wir zeigen an einigen Beispielen, wie die einfachsten, bekanntesten Raumgebilde, nämlich Strecke, Rechteck und Quadrat zur Erläuterung und Veranschaulichung der Auflösung benutzt werden können.

a) Benutzung der Strecke. Als Ausgangspunkt einer Gruppe von Aufgaben, die durch Anwendung einer Strecke gelöst werden, nehmen wir

1) Aufgabe. Ein Beamter, dessen Gehalt verdoppelt worden ist, erhält jetzt jährlich ebensoviel über 900 *M*, als ihm bisher an 900 *M* gefehlt hat. Wieviel beträgt jetzt sein jährliches Einkommen?

Um den Wert der Auflösung durch „geometrische Versinnlichung" recht zu erkennen, löse man die Aufgabe arithmetisch, hierauf mittels Gleichung, also algebraisch, und schließlich mit Hilfe geometrischer Darstellung.

α) Die arithmetische Lösung könnte etwa auf folgende Weise geschehen:

Nach der Aufgabe ist das ursprüngliche Gehalt verdoppelt worden. Die Zulage zerfällt in zwei gleiche Teile; der erste Teil ergänzt das anfängliche Gehalt zu 900 *M*, der zweite Teil übersteigt 900 *M* um denselben Betrag. Da beide Teile gleich der ganzen Zulage, also auch gleich dem ursprünglichen Gehalt sind, so beträgt ein Teil die Hälfte dieses Gehaltes. Das Anfangsgehalt und die Hälfte desselben, also $1\frac{1}{2}$ mal das ursprüngliche Einkommen ist nach der Aufgabe gleich 900 *M*. Folglich beträgt das ursprüngliche Gehalt:

$$900\ \mathcal{M} : 1\tfrac{1}{2} = 600\ \mathcal{M}$$

und das jetzige Einkommen:

$$2 \times 600\ \mathcal{M} = 1200\ \mathcal{M}.$$

β) Algebraische Auflösung. Wir bezeichnen die Zahl, welche sein ursprüngliches Gehalt in Mark ausdrückt, vorläufig

Auflösung. Bhaskara löst diese Aufgabe, indem er versuchsweise 3 annimmt, und erhält so: 15, 10 und 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, das Ergebnis ist $4\frac{1}{4}$. Letzteres ist in der gegebenen Zahl (68) 16 mal enthalten, und daher ist die richtige Zahl:

$$16 \cdot 3 = 48.$$

In einem alten Rechenbuche*) ist die einfache Falsirechnung unter der Überschrift „De regula propositionum oder falsi“ behandelt. Über die Theorie dieser Methode verbreitet sich die Schrift folgendermaßen: „Der Prozeß dieser Regel verhält sich also: Man nimmt eine Zahl nach Belieben, doch so, daß in selbiger die in der Aufgabe bestimmten Teile ohne Rest aufgehen; mit dieser erdichteten Zahl verfährt man nach den Anforderungen der Aufgabe, Gefundenes addiert man, das Collect ist die erste Zahl, die angenommene oder erdichtete Zahl ist die andere Stelle, und was sonst aus der Aufgabe bekannt, die dritte Stelle; alsdann verfährt man nach der gemeinen Regel de tri, wie nachgesetzte Exempel des mehren zeigen werden.“

Aufgabe. Ein Sohn fragt seinen Vater, wie alt er sei. Der Vater antwortete ihm: Wärest du noch einmal so alt, $\frac{1}{2}$ mal so alt, $\frac{1}{4}$ mal so alt und noch 1 Jahr älter, so wärest du gerade 100 Jahre alt. Wie alt ist der Sohn?

„**Auflösung.** Gesetzt, der Sohn sei 48 Jahre alt (48 ist die erdichtete Zahl).

48	
96	noch einmal so alt
24	$\frac{1}{2}$ mal " "
12	$\frac{1}{4}$ mal " "
132	Collect

$100 - 1 = 99$; $48 \cdot 99 : 132 = 36$.

Der Sohn war also 36 Jahre alt.“

Nach unserer modernen Dreisatzberechnung würde der Ansatz etwa so lauten: Beträgt das Ergebnis (Collect) 132 Jahre, so ist das Alter 48 Jahre. Wie viel beträgt das Alter, wenn das Ergebnis 99 ist?

Das Verfahren mit einer angenommenen Zahl ist also sehr einfach. Die Richtigkeit desselben beruht auf dem Schlusse:

*) Das Titelblatt fehlt.

Die angenommene Zahl a verhält sich zur Unbekannten x wie die aus a durch die geforderten Veränderungen der Aufgabe erhaltene Zahl m zu der gegebenen Zahl n.

In Zeichen: $m : n = a : x$.

Bei der einfachen Falsirechnung dürfen nur die vier ersten Rechnungsarten der Arithmetik auf Bruchteile der Ergebnisse angewendet werden, wie der Kommentator der Schriften Bhaskaras (Ganeça) richtig bemerkt.

B) **Die Regel der zwei falschen Ansätze.** Zur Einführung in das Verständnis der doppelten Falsirechnung diene folgendes Beispiel.

1. Aufgabe. Ein Vater ist 42 Jahre, sein Sohn 6 Jahre alt. Nach wie viel Jahren ist der Vater 4mal so alt als der Sohn?

Auflösung. 1. Annahme: nach 3 Jahren. Dann ist der Sohn 9 Jahre und der Vater 45 Jahre alt. Nach der Aufgabe soll der Vater 4mal so alt als sein Sohn, er müßte also 36 Jahre alt sein. Folglich ist die erste Abweichung, der erste Fehler:

45 Jahre — 36 Jahre = 9 Jahre.

2. Annahme: nach 4 Jahren. Dann ist der Sohn 10 Jahre und der Vater 46 Jahre alt. Laut Bedingung der Aufgabe müßte letzterer 40 Jahre zählen. Die zweite Abweichung ist also:

46 Jahre — 40 Jahre = 6 Jahre.

Durch die 2. Annahme hat der erste Fehler um 3 Jahre abgenommen. Derselbe soll gleich 0 werden, also muß er noch um 6 abnehmen. Damit dieser Überschuß verschwindet, muß die 2. Annahme um so viel Jahre wachsen, als 3 Jahre in 6 Jahren enthalten sind, also um 2 Jahre. Der Vater ist daher nach:

4 Jahren + 2 Jahren = 6 Jahren

4mal so alt als sein Sohn. — Probe!

Früher verfuhr man rein mechanisch*) nach folgender Regel: Man nahm zwei beliebige Zahlen a_1 und a_2 an, vollzog an ihnen die in der Aufgabe geforderten Veränderungen und bestimmte die beiden Abweichungen oder Fehler f_1 und f_2 zwischen den erhaltenen Zahlen und der gegebenen Zahl. Dann bildete man zwei sich schneidende Geraden, setzte an die beiden Endpunkte der einen Seite die willkürlichen Annahmen und an die andern Endpunkte die beiden Fehler. Nun multiplizierte man die Zahlen „im Kreuz" und nannte das Produkt $a_2 f_1$ das erste und das Produkt $a_1 f_2$ das zweite Resultat. Waren die Abweichungen gleichartig, also beide positiv oder negativ, so dividierte man die Differenz der Resultate durch den Unterschied der Fehler, in Zeichen:

$$x = \frac{a_2 f_1 - a_1 f_2}{f_1 - f_2}.$$

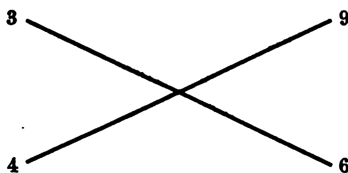
Traten dagegen die Abweichungen f_1 und f_2 mit verschiedenen Vorzeichen behaftet auf, so wurde die Summe der Produkte durch die Summe der Fehler dividiert, in Zeichen:

$$x = \frac{a_2 f_1 + a_1 f_2}{f_1 + f_2}.$$

Das Schema der Berechnung war wie folgt (Aufgabe 1).

Setze 3 Jahre.			Setze 4 Jahre.		
Sohn	9	Jahre	Sohn	10	Jahre
Vater	45	„	Vater	46	„
	36	„ sollten sein.		40	„ sollten sein.
	9	Jahre.		6	Jahre.

Fig. 30.



$$x = \frac{4 \cdot 9 - 3 \cdot 6}{9 - 6} = 6.$$

*) Ein solches geistloses Rechnen geißelt Schweitzer in seiner „Methode für Elementarlehrer" in folgender Weise: „Nach der alten Methode machte man die Schüler zu bewußtlos operierenden Rechenmaschinen, wahrscheinlich, weil es damals noch keine Rechenmaschinen gab, deren Erfindung erst der neueren Zeit angehört. Gewisse unbegriffene Kunstgriffe wurden eingeübt, und höchstens gewann unter den vielen Martern einseitig das Gedächtnis. Alles war ein geistloses Treiben, durch welches sich die Schüler in einem hohlen Regelwerk festrenneten". Vergleiche das in § 92 über die Regel falsi Gesagte.

Beweis für die Richtigkeit vorstehender Regel. Die algebraische Begründung der Regel des doppelten falschen Ansatzes ist einfach. Da die algebraische Auflösung der Aufgaben, welche mittels der Regel falsi lösbar sind, auf eine Gleichung von der Form:

$$ax = b$$

führt, so genügt es, die Richtigkeit des Gesetzes der Falsirechnung für diese Gleichung zu beweisen.

Nimmt man für die Unbekannte x zwei beliebige Werte an, etwa:

$$x = a_1 \quad \text{und} \quad x = a_2$$

und setzt diese Zahlen statt x nacheinander in die Gleichung $ax = b$ ein, so hat man im allgemeinen die Fehlergleichungen:

$$a \cdot a_1 = b \quad \text{und} \quad a \cdot a_2 = b.$$

Die beiden Fehler oder Abweichungen sind offenbar:

$$b - aa_1 \quad \text{und} \quad b - aa_2.$$

Setzt man den Fehler in der ersten Gleichung gleich f_1 und den Fehler in der zweiten Gleichung gleich f_2, also:

$$b - aa_1 = f_1 \quad \text{und} \quad b - aa_2 = f_2,$$

so folgt:

$$aa_1 = b - f_1 \quad \text{und} \quad aa_2 = b - f_2.$$

Subtrahiert man die beiden letzten Gleichungen nacheinander von der gegebenen, so entsteht:

$$a(x - a_1) = f_1 \quad \text{und} \quad a(x - a_2) = f_2.$$

Offenbar sind die beiden aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werte für a einander gleich, d. h.:

$$\frac{f_1}{x - a_1} = \frac{f_2}{x - a_2}.$$

Hieraus erhält man die Proportion:

$$(x - a_1) : (x - a_2) = f_1 : f_2$$

und

$$x = \frac{a_2 f_1 - a_1 f_2}{f_1 - f_2}.$$

Die gefundene Formel für x drückt folgendes allgemein gültige **Gesetz** aus: Die Unbekannte x ist einem Bruche gleich, dessen **Zähler** gebildet ist aus einer Differenz, deren Minuend das Produkt aus der zweiten Annahme und dem ersten Fehler und deren Minuend das Produkt aus der ersten Annahme und dem zweiten Fehler ist; und dessen **Nenner** die Differenz der beiden Abweichungen darstellt. (Man vergleiche obige Regel.)

Das Verfahren der doppelten Falsirechnung lautet in einfachster Form: Setze 1) $a_1 = 0$, 2) $a_2 = 1$ und bestimme die Fehler f_1 und f_2, dann ist die Unbekannte gleich dem ersten Fehler dividiert durch die Differenz der Fehler, in Zeichen:

$$x = \frac{f_1}{f_1 - f_2}.$$

Die Rechnung mit den Annahmen 0 und 1 empfiehlt sich bei manchen Aufgaben der bequemen Operationen halber.

2) Beispiel. Gegeben sei die 8) Aufgabe in § 93.

Auflösung. 1) Gesetzt, nach der ersten Aufstellung ständen in einer Reihe 0 Mann, dann wäre das Regiment:

$$0^2 + 39 = 39 \text{ Mann}$$

stark. Beim zweiten Versuch ergäbe sich dann:

$$(0 + 1)^2 - 50 = -49.$$

Folglich beträgt der Fehler:

$$39 - (-49) = 88.$$

2) Angenommen, in einer Reihe wäre 1 Mann, so würde das Regiment:

$$(1^2 + 39) \text{ Mann} = 40 \text{ Mann}$$

zählen. Dann ständen nach der zweiten Aufstellung auf einer Seite 2 Mann, und es wäre:

$$2^2 - 50 = -46.$$

Mithin ist jetzt der Fehler:

$$40 - (-46) = 86.$$

Durch die zweite Annahme ist der Fehler um:

$$88 - 86 = 2$$

vermindert worden; er soll noch um 86 abnehmen. Die zweite Annahme muß daher so oft um 1 größer genommen werden, als 2 in 86 enthalten ist, d. i. um 43. Es standen daher auf einer Seite des Quadrates:

$$(1 + 43 =) \; 44 \text{ Mann},$$

und das Regiment war:

$$(44^2 + 39) \text{ Mann} = 1975 \text{ Mann}$$

stark. Nach obiger Regel ist:

$$x = \frac{f_1}{f_1 - f_2} = \frac{88}{88 - 86} = 44.$$

Dem Lernenden empfehlen wir, nicht mechanisch nach obiger Formel den Wert der Unbekannten zu berechnen, sondern die Auflösung in Worten zu liefern, wie in den Beispielen 1) und 2) gezeigt ist.

Geschichtliches. Das Verfahren, von einem falschen Ansatz auszugehen und den Fehler nachträglich zu berichtigen, war zuerst bei den alten Ägyptern in Gebrauch. Bei den Indern begegnet uns diese Rechnung als bewußte, ausgebildete Methode. Die Rechnung mit zwei falschen Annahmen gehörte auch bei den alten Arabern zur Zeit Mohammed ben Musas „zum Grundstocke mathematischer Wahrheiten". Arabische Algebraiker schreiben die Erfindung der Falsirechnung den Gelehrten der Inder zu. Die Araber nennen das Verfahren „Regel der zwei Fehler" und „Methode der Wagschalen" (regula lancium). Letztere ist von Ibn Albannâ, d. h. Sohn des Baumeisters, (geb. 1252 oder 1257 in Marokko) in hohem Maße ausgebildet worden. Ein Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens wurde dagegen weder von einem indischen noch von einem arabischen Mathematiker gegeben.

Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

§ 97. Begriff und Eigenschaften eines Systems linearer Gleichungen.

Die Normalform einer Gleichung ersten Grades mit mehreren Unbekannten ist:

$$ax + by + cz + \cdots\cdots = k,$$

in welcher die Zeichen $x, y, z \cdots\cdots$ unbekannte und die Koeffizienten $a, b, c \cdots\cdots$ sowie das Absolutglied k gegebene Zahlen bezeichnen. Ist in einem besondern Falle $k = 0$, so heißt vorstehende Gleichung homogen. Kommen in einer Gleichung mehrere unbekannte Größen vor, so kann man zwar den Wert jeder Unbekannten inbezug auf die andern ausdrücken; aber da hier die Werte der Unbekannten voneinander abhängig sind, oder, wie man sich wissenschaftlich auszudrücken pflegt, die eine Unbekannte eine Funktion aller übrigen ist, so ist der gefundene Wert unbestimmt. Es sei z. B. die Gleichung:

$$5x + 3y = 13$$

gegeben. Lösen wir dieselbe nach x auf, so erhalten wir:

$$x = \frac{13 - 3y}{5}.$$

Der gefundene Wert für x ist aber unbestimmt, weil wir den Wert der Unbekannten y nicht kennen. Nehmen wir hingegen für y einen willkürlichen Wert an, setzen z. B.:

$$y = 0, \quad y = 1, \quad y = 3,$$

so folgt:

$$x = 2\tfrac{3}{5}, \quad x = 2, \quad x = 1\tfrac{4}{5}.$$

Wie man ersieht, verwandelt sich die vorgelegte Gleichung durch beliebig gewählte Werte für y und den jedesmal berechneten für x stets in eine identische. Eine Gleichung mit zwei und mehreren Unbekannten hat daher unendlich viele Lösungen und wird eine unbestimmte oder diophantische*) Gleichung

*) Diophantus, ein berühmter Mathematiker des Altertums, gestorben um 350 n. Chr., hat sich viel mit unbestimmten Gleichungen

genannt. Es leuchtet ein, daß eine Gleichung mit zwei Unbekannten nicht genügt, um mit Ausschluß willkürlicher Annahmen, also durch strenge Rechnung für jede Unbekannte nur einen bestimmten Zahlenwert zu finden. Zu diesem Zwecke muß vielmehr eine zweite Gleichung gegeben sein, die bestimmte Eigenschaften erfüllt. Um überhaupt die Werte von n Unbekannten bestimmt ermitteln zu können, sind ebenso viele Gleichungen erforderlich. Mehrere zusammengehörige Gleichungen heißen ein System von Gleichungen.

Ein Gleichungssystem auflösen heißt, die bestimmten Werte der Unbekannten finden, welche jede der gegebenen Gleichungen in eine identische verwandelt. Sind z. B. die Gleichungen:

$$x + 2y = 9 \quad \text{und} \quad 2x + 3y = 16$$

gegeben, so genügen diesem System nur die Werte:

$$x = 5 \quad \text{und} \quad y = 2,$$

weil nur durch Einsetzung dieser Zahlen jede Gleichung in eine identische übergeht. Zur Auffindung der bestimmten Zahlenwerte der Unbekannten sind an das Gleichungssystem gewisse Anforderungen zu stellen. Die n gegebenen Gleichungen mit n Unbekannten müssen a) voneinander unabhängig sein, und b) keine Gleichung darf einer andern widersprechen. Gleichungen heißen unabhängig, wenn sie aus andern durch arithmetische Umformungen nicht hergeleitet werden können. Das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{aligned} 2x + 5y - 3z &= 7 \\ x - 13y + 10z &= 3 \\ 3x - 8y + 7z &= 10 \end{aligned}\right\}$$

muß als unbrauchbar zur Auflösung verworfen werden, da die erste Gleichung das Ergebnis der Subtraktion der zweiten Gleichung von der dritten ist. Entspricht ein Gleichungssystem den vorhin angegebenen Anforderungen, so lassen sich allemal die Werte der Unbekannten durch strenge Auflösungsmethoden finden.

---

beschäftigt, und ihm zu Ehren nennt man die unbestimmten Gleichungen auch diophantische.

§ 98. Zeichnerische Darstellung der Lösungen einer linearen Gleichung zwischen zwei Unbekannten.*)

Man nennt die Zahlen für x und y, welche eine vorgelegte Gleichung in eine identische verwandeln, zusammengehörige Werte und jedes zusammengehörige Wertepaar eine Lösung der Gleichung. Jeder Gleichung mit zwei Unbekannten genügen unzählig viele Lösungen. Dieselben werden erhalten, wenn man eine gegebene Gleichung inbezug auf eine Unbekannte, etwa y, auflöst, in dem erhaltenen Ausdruck an Stelle von x einen beliebigen Zahlenwert setzt und hiernach y berechnet. Es sei die Gleichung:

$$3x - 2y = 6, \quad \text{also} \quad y = 3(\tfrac{1}{2}x - 1)$$

gegeben. Setzt man:

$$x = \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \cdots\cdots$$

so wird:

$$y = -3, \quad -1\tfrac{1}{2}, \quad 0, \quad 1\tfrac{1}{2}, \quad 3, \quad 4\tfrac{1}{2}, \quad 6, \cdots\cdots$$

Um nun sowohl die unendliche Anzahl von Lösungen der vorstehenden Gleichung als auch die gegenseitige Abhängigkeit der Unbekannten zu versinnlichen, verfährt man auf folgende Weise.

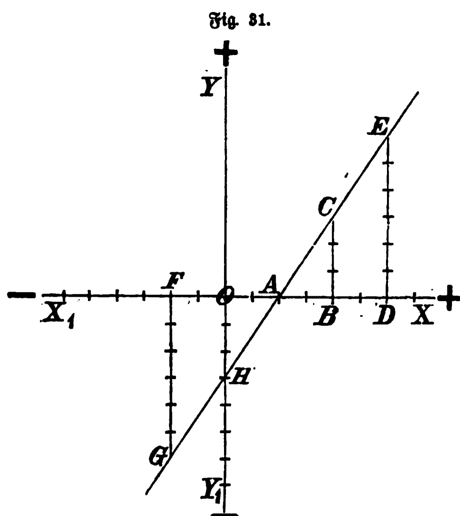
Man zeichnet (Fig. 31) durch einen festen Punkt O zwei sich rechtwinkelig schneidende Geraden, XX_1 und YY_1, die man nach jeder Seite hin als unbegrenzt annimmt. In jeder Geraden unterscheidet man eine positive und eine negative

*) Über den didaktischen Wert des hier behandelten Gegenstandes äußert sich Culmann in seiner Schrift „Die graphische Statik" (2. Auflage): „Es liegt nicht im Zwecke dieses Werkes, die Theorie der Gleichungen graphisch weiter zu entwickeln, allein es würde das Verständnis derselben gewiß ungemein erleichtern, wenn man die abstrakten Zahlverhältnisse durch Zeichnung darstellen und erläutern würde". — Hauck sagt: „Bei der Entwickelung der Theorie der Gleichungen wird niemand dieses wertvolle Veranschaulichungsmittel unbenutzt lassen". — Scherling schreibt: „Die Aufnahme der graphischen Darstellung ist als eine wertvolle Beigabe dankend hinzunehmen". (Zeitschrift für math. Unterricht, XII. Jahrg. Seite 342 und 369.)

Hälfte. Setzt man die Richtung OX rechts von O als die positive fest, so muß man die entgegengesetzte OX_1 als negativ bezeichnen, und nimmt man die Richtung OY oberhalb XX_1 als positiv an, so muß man notwendig die Halbachse OY_1 als negativ ansehen. (Man vergleiche §§ 29 und 38.)

Die Werte der Unbekannten x werden versinnlicht, indem man nach einer bestimmten Längeneinheit die diesen Zahlen entsprechenden Längen auf der Achse XX_1 vom Nullpunkt aus abträgt, und zwar die positiven Werte auf der positiven und die negativen auf der andern Hälfte. Man nennt daher die

Fig. 81.



Gerade XX_1 die X=Achse, und da die Abschnitte auf derselben, welche die Werte von x veranschaulichen, Abscissen heißen, so führt die X=Achse auch den Namen Abscissenachse. Um den Wert für y zeichnerisch darzustellen, der einem bestimmten Wert für x zugeordnet ist, errichte man im Endpunkt dieser Abscisse x die Senkrechte, deren Länge dem Zahlenwert für y entspricht. Obigen Festsetzungen zufolge fallen die Strecken für alle positiven Werte von y oberhalb, dagegen die negativen unterhalb der X=Achse. Die Lote, welche zur Versinnlichung der Werte

von y dienen, heißen Ordinaten, sie werden nach ihrer Lage in positive und negative unterschieden. Man nennt die Achse YY_1, welche mit der Ordinaten-Richtung parallel gezogen ist, Ordinatenachse. Für alle Punkte der Abscissenachse ist die Ordinate gleich Null, und in jedem Punkte der Ordinatenachse ist $x = 0$. Statt die Ordinaten unmittelbar an ihre Abscissen anzutragen, kann man die Werte für y auch auf der Geraden YY_1 abtragen, durch den erhaltenen Punkt die Parallele zur X-Achse und aus dem Endpunkt der zugehörigen Abscisse die Parallele zur Ordinatenachse ziehen, der Schnittpunkt beider Parallelen giebt die Lage des Punktes für y genau an. Weil man alle Werte für y auf der Geraden YY_1 abtragen kann, so nennt man diese auch Y-Achse. Abscisse und Ordinate führen den gemeinschaftlichen Namen „Koordinaten" und die beiden Achsen die Benennung Koordinatenachsen. Der letzteren gemeinschaftlicher Punkt O heißt der Anfang oder Ursprung der Koordinaten, hier sind Abscisse und Ordinate gleich Null.

In vorstehender Zeichnung versinnlicht Punkt G die Lösung

$$x = -2, \qquad y = -6,$$

Punkt C das Wertepaar

$$x = 4, \qquad y = 3$$

und endlich Punkt E die Lösung

$$x = 6, \qquad y = 6$$

der vorgelegten Gleichung

$$3x - 2y = 6.$$

Jede Lösung der letzteren, überhaupt jeder linearen Gleichung zwischen zwei Unbekannten, wird durch einen Punkt versinnlicht, dessen Abscisse und Ordinate den zusammengehörigen Werten von x und y gleich sind. Denkt man sich für alle (reellen) Zahlen der relativen Zahlenreihe (§ 58) von x die zugehörigen Werte für y berechnet und die entsprechenden Punkte in der Ebene zeichnerisch dargestellt, so liegen diese Bilder nicht getrennt, sondern sie fließen lückenlos

ineinander über und bilden eine gerade Linie.*) Die unzählig vielen Lösungen jeder Gleichung von der Form:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{oder} \quad y = ax + b$$

können also räumlich miteinander verbunden und durch eine Gerade versinnlicht werden. Wir sind somit zur Aufstellung des folgenden Lehrsatzes berechtigt:

Lehrsatz: Jede Gleichung ersten Grades zwischen zwei Unbekannten kann durch eine bestimmte Gerade bildlich dargestellt werden.

Man nennt daher die Normalform einer linearen Gleichung zwischen x und y, also die Gleichung:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{oder} \quad y = ax + b,$$

die Gleichung der Geraden.**) Da jede Gerade durch zwei feste Punkte vollständig bestimmt ist, so findet man das Bild einer vorgelegten Gleichung, wenn man für zwei Lösungen die Punkte sucht und durch diese die Gerade zieht. Der Einfachheit wegen pflegt man die zwei Punkte festzustellen, in welchen die gesuchte Gerade die Achsen schneidet. Die Linie hat stets mit jeder Achse einen Punkt gemeinsam, wenn die Werte der Buchstaben a, b und c in der Gleichung von Null verschieden sind.

Beispiel. Gegeben sei die Gleichung:

$$2x - y + 4 = 0,$$

man soll die bildliche Darstellung derselben finden.

Auflösung. Man erwäge, daß die Ordinaten aller Punkte der X-Achse gleich Null sind. Für die Abscisse des

---

*) In unserer Zeichnung verhält sich:

$$AB : AD = BC : DE \quad \text{und} \quad AO : AF = OH : FG.$$

Diese Proportionen können der Konstruktion gemäß nur unter der Bedingung bestehen, daß Dreieck:

$$ABC \sim ADE \quad \text{und} \quad AOH \sim AFG,$$

d. i. die durch die Punkte G, H, A, C und E gezogene Linie gerade ist.

**) Man vergleiche die erste Fußnote Seite 267.

Schnittpunktes der gesuchten Geraden muß also $y = 0$ sein. Um diese Abscisse zu finden, setzt man daher $y = 0$ und sucht aus der Gleichung $2x + 4 = 0$ den Wert für x; man findet $x = -2$. Da für alle Punkte der Y-Achse $x = 0$ ist, so setze man zur Bestimmung des Schnittpunktes der Geraden mit der Ordinatenachse in der gegebenen Gleichung $x = 0$. Aus $-y + 4 = 0$ folgt $y = 4$. Trägt man die Abscisse $x = -2$ und die Ordinate $y = 4$ vom Anfangspunkt aus ab und zieht durch die erhaltenen Punkte die Gerade, so ist diese das Bild der vorgelegten Gleichung.

Besondere Fälle. Betrachten wir jetzt die Fälle, in welchen die Zeichen a, b und c einzeln und zwei*) derselben von Null verschiedene Werte bezeichnen.

1) Es sei $a = 0$, so geht die Normalgleichung:

$$ax + by + c = 0$$

in die folgende über:

$$1) \quad by + c = 0, \quad \text{woraus folgt} \quad y = -\frac{c}{b}.$$

Die Gleichung 1) wird durch eine Gerade versinnlicht, die im Abstande $-\frac{c}{b}$ mit der X-Achse parallel läuft. So z. B. ist die bildliche Darstellung der Gleichung $2y + 4 = 0$ die gerade Linie, welche im Abstande von 2 Längen unterhalb der X-Achse mit dieser parallele Richtung hat.

2) Ist gleichzeitig $a = 0$ und $c = 0$, so hat die Gleichung die Form:

$$2) \quad by = 0; \quad \text{also} \quad y = 0.$$

Der Gleichung 2) entspricht eine Gerade, welche mit der Abscissenachse zusammenfällt, d. h. diese Achse selbst. Die Gleichung der X-Achse heißt also $y = 0$.

3) Hat b den Wert Null, so verwandelt sich die Normalform in folgende:

---

*) a und b dürfen nicht zugleich den Wert 0 annehmen, weil dadurch beide Unbekannten aus der Gleichung verschwinden würden.

$$3) \quad ax + c = 0; \quad \text{mithin} \quad x = -\frac{c}{a}.$$

Das Bild dieser Gleichung ist die Gerade, welche mit der Y-Achse im Abstande $-\frac{c}{a}$ parallel geht. Wird zugleich auch $c = 0$, so entsteht:

$$4) \quad ax = 0, \quad \text{also} \quad x = \frac{0}{a} = 0.$$

Diese Gleichung bezeichnet die Y-Achse.

5) Wenn ferner $c = 0$ ist, so erhält die Normalgleichung die Form:

$$5) \quad ax + by = 0,$$

welcher die Werte $x = 0$ und $y = 0$ genügen. Gleichung 5) hat zum Bilde eine Gerade, welche durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht.

Beispiel. Gegeben:

$$2x + y = 0.$$

Setzt man $x = -1$, so wird $y = 2$ und für $x = -2$ wird $y = 4$. Stellt man die Punkte, welche diese Koordinaten erfüllen, dar, und zieht die Gerade, so sieht man, daß dieselbe durch den Anfangspunkt geht.

Die zeichnerische Darstellung der Gleichungen liefert ferner ein anschauliches Bild der gegenseitigen Abhängigkeit der Unbekannten. In Figur 31 steigt die Gerade AE nach rechts und man sieht deutlich, wie das Wachsen der Abscisse x auch ein Zunehmen der Ordinaten zur Folge hat. Wenn dagegen die Gerade nach rechts fällt, so nehmen die Abscissen zu, während die zugehörigen Ordinaten kleiner werden. Steigt die Linie nach links, so nehmen die Abscissen ab, während die Ordinaten wachsen, und fällt die Gerade nach links, so nehmen die Koordinaten ab*), wie die Linie EG (Fig. 31) anschaulich zeigt.

---

*) Der Lernende vergegenwärtige sich den Inhalt von § 32.

§ 99. Methoden zur Auflösung eines Systems einfacher Gleichungen.

Das Verfahren, ein Gleichungssystem mit n Unbekannten aufzulösen, besteht darin, daß man durch Verbindung der gegebenen Gleichungen nach und nach die einzelnen Unbekannten beseitigt, bis man schließlich eine Gleichung mit nur einer Unbekannten erhält. Diese Gleichung wird alsdann nach den für die Gleichungen mit einer Unbekannten gegebenen Regeln aufgelöst. Eine Unbekannte aus einem System wegschaffen, heißt dieselbe eliminieren*), und die Endgleichung, in welcher durch Elimination nur eine unbekannte Größe vorkommt, wird Eliminationsgleichung genannt. Die Elimination der Unbekannten läßt sich durch verschiedene Methoden erreichen, welche man Eliminationsmethoden nennt. Da das Verfahren bei Gleichungssystemen mit mehr als zwei Unbekannten nur mehrere Male angewendet wird, so zeigen wir die verschiedenen Methoden der Auflösung an einem System aus zwei einfachen Gleichungen.

I. Die Additions- und Subtraktions- (englische) Methode.

Man bringe das gegebene Gleichungssystem zunächst auf die Normalform:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1, \end{cases}$$

falls es in dieser Form nicht bereits erscheint. Das einfachste und häufig vorkommende System ist:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b. \end{cases}$$

Auflösung. Um den Wert für x zu finden, addiere man die beiden Gleichungen, so entsteht:

$$2x = a + b; \quad \text{folglich} \quad x = \tfrac{1}{2}(a + b).$$

*) Nach Euler (1707 — 1783) aus Basel, Mathematiker in St. Petersburg.

Subtrahiert die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man:

$$2y = a - b; \quad \text{mithin} \quad y = \tfrac{1}{2}(a - b).$$

Diese Werte der Unbekannten sind für die Auflösung der quadratischen Gleichungen mit zwei unbekannten Größen wohl zu merken. Wie lauten die gegebenen Gleichungen und die Ergebnisse in der Wortsprache? Sind die Koeffizienten von x und y in der einen Gleichung den Faktoren von y und x der andern gleich, so kann man das System auf das vorstehende zurückführen, z. B.:

Gegeben:
$$\begin{cases} 12x + 7y = 69 \\ 7x + 12y = 64. \end{cases}$$

Durch Addition beider Gleichungen entsteht:

$$19(x + y) = 133, \quad \text{also} \quad x + y = 7.$$

Die Subtraktion der Gleichungen liefert:

$$5(x - y) = 5, \quad \text{mithin} \quad x - y = 1.$$

Durch eine zweckmäßige Verbindung mancher Systeme kann man die Summe oder die Differenz der Unbekannten ableiten, z. B.:

$$\left.\begin{aligned} 1)\quad 87x + 45y &= 480 \\ 2)\quad 79x + 53y &= 448 \end{aligned}\right\}$$

Subtrahiert giebt:

$$8(x - y) = 32$$
$$x - y = 4.$$

Diese Gleichung mit 45 multipliziert und die erhaltene Gleichung zu 1) addiert, liefert:

$$34x = 170; \quad x = 5 \text{ u. s. w.}$$

$$\left.\begin{aligned} 1)\quad 95x + 81y &= 433 \\ 2)\quad 46x + 39y &= 209 \end{aligned}\right\}$$

Die 2) Gleichung mit 2 multipliziert und die neue Gleichung von 1) subtrahiert, liefert:

$$3(x + y) = 15; \quad x + y = 5.$$

Multipliziert man letztere Gleichung mit 39 und subtrahiert die neue Gleichung von 2), so entsteht:

$$7x = 14; \quad x = 2 \text{ u. s. w.}$$

Das allgemeine Verfahren, ein auf die Normalform gebrachtes System aufzulösen, besteht darin, daß man zunächst die Koeffizienten der zu eliminierenden Unbekannten gleich groß macht, und die neuen Gleichungen durch Addition

oder Subtraktion verbindet, je nachdem die Koeffizienten entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben. Dadurch entsteht eine Eliminationsgleichung, deren Auflösung bekannt ist. Um bei Vorbereitung der Elimination mit den kleinsten Zahlen zu rechnen, multipliziere man die gegebenen Gleichungen mit solchen Faktoren, daß die fortzuschaffenden Unbekannten das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (§ 66) als Koeffizienten erhalten. In besonderen Fällen ist es zweckmäßig, eine gegebene Gleichung durch einen bestimmten Faktor zu dividieren.

Beispiel. Gegeben sei das System:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 17x - 36y = 98 \\ 2) & 11x + 90y = 290. \end{array}\right\}$$

Auflösung. Das kleinste Vielfache der Koeffizienten 36 und 90 ist $4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$. Multipliziert man Gleichung 1) mit 5, die zweite mit 2 und addiert die erhaltenen Gleichungen, so entsteht:

$$107x = 1070; \quad \text{folglich} \quad x = 10.$$

Um x zu eliminieren, multipliziere man die erste Gleichung mit 11, die zweite mit 17 und subtrahiere die neuen Gleichungen, so ergiebt sich:

$$1926y = 3852; \quad \text{also} \quad y = 2.$$

Abgekürzte Auflösung. Die Lösung von Systemen (besonders mit 2 Unbekannten), welche keine großen Zahlen enthalten, kann dadurch wesentlich abgekürzt werden, daß man nicht sämtliche Umformungen und Verbindungen der Gleichungen anschreibt, sondern die Rechenarbeiten ganz oder zum Teil im Kopfe ausführt.

Beispiel. Gegeben:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 9x + 7y = 111 \\ 2) & 6x - 5y = 45. \end{array}\right\}$$

Verfahren: Man setze die Faktoren, mit welchen die Gleichungen zur Fortschaffung der Unbekannten y multipliziert werden müssen, rechts neben die Gleichungen. Da y fortfällt,

so kommt diese Größe zur Berechnung des Wertes von x nicht inbetracht. Den Wert der Unbekannten schreibe man in Bruchform sofort hin. Der Zähler des Bruches besteht aus den Produkten der Zahlen auf der rechten Seite der Gleichungen, der Nenner enthält die Produkte aus den Koeffizienten von x und den entsprechenden Faktoren. Das Schema der Auflösung sieht so aus:

		y
1)	$9x + 7y = 111$	5
2)	$6x - 5y = 45$	7

$$x = \frac{5 \cdot 111 + 7 \cdot 45}{5 \cdot 9 + 7 \cdot 6} = \frac{970}{97} = 10.$$

Um x zu eliminieren, kann man Gleichung 1) mit 2, Gleichung 2) mit 3 multiplizieren und hierauf die entstandenen Gleichungen subtrahieren. Der Gleichförmigkeit des Verfahrens wegen empfiehlt es sich, die Faktoren so zu wählen, daß stets eine Addition der Gleichungen zur Elimination der Unbekannten führt. Daher multipliziere man die erste Gleichung mit 2, die zweite mit (—3) und addiere die neuen Gleichungen. So ergiebt sich folgende Darstellung:

		x
1)	$9x + 7y = 111$	2
2)	$6x - 5y = 45$	-3

$$y = \frac{222 - 135}{14 + 15} = \frac{87}{29} = 3.$$

Das vollständige abgekürzte Verfahren für die Auflösung eines Systems mit zwei Unbekannten ist aus folgendem Schema ersichtlich:

		y	x
1)	$20x + 9y = 136$	4	3
2)	$15x - 4y = 59$	9	-4

$$x = \frac{4 \cdot 136 + 9 \cdot 59}{80 + 135} = \frac{1075}{215} = 5.$$

$$y = \frac{3 \cdot 136 - 4 \cdot 59}{27 + 16} = \frac{172}{43} = 4.$$

II. Die Methode der Einsetzung oder Substitution.

Gegeben sei das vorige System. Man löse eine Gleichung nach einer Unbekannten auf und setze oder substituiere den erhaltenen Ausdruck*) an Stelle dieser Unbekannten in die andere Gleichung, wodurch diese sich in eine Eliminationsgleichung verwandelt. So folgt z. B. aus Gleichung 1):

$$y = \frac{15x - 59}{4}.$$

Diesen Wert statt y in 2) eingesetzt, liefert:

$$20x + 9 \cdot \frac{15x - 59}{4} = 136.$$

Hieraus x bestimmt, liefert $x = 5$ und daher ist:

$$y = \frac{75 - 59}{4} = 4.$$

Diese Eliminationsmethode führt fast durchgängig auf Gleichungen, in welchen Quotienten vorkommen, und daher ist ihre Anwendung namentlich bei Gleichungssystemen mit mehr als zwei Unbekannten mit umständlichen Rechnungen verknüpft. Bei Benutzung dieser Verfahrungsart wird man den Wert derjenigen Unbekannten aus einer Gleichung entwickeln, welche den einfachsten Ausdruck liefert und den kleinsten Koeffizienten hat. Die Substitutionsmethode findet am meisten Anwendung zur Auflösung eines Systems, in welchem die eine vom ersten und die andere vom zweiten Grade ist.

III. Die Gleichsetzungs- oder Komparationsmethode.

Es sei wieder das letzte System gegeben. Löst man jede der vorgelegten Gleichungen nach einer und derselben Unbekannten, z. B. nach x auf, so erhält man

aus 1) $x = \frac{136 - 9y}{20}$ und aus 2) $x = \frac{59 + 4y}{15}$.

Setzen wir diese Ausdrücke für x nach dem 3) Grundsatze,

*) Nach dem Grundgesetze: Man darf Gleiches für Gleiches setzen (Einleitung 13, 3).

Einleitung 13) einander gleich, so entsteht die Eliminationsgleichung in y:

$$\frac{59+4y}{15}=\frac{136-9y}{20}. \quad \text{Hieraus } y=4.$$

Drückt man aus beiden Gleichungen die Werte für y aus und verbindet letztere durch das Gleichheitszeichen, so hat man:

$$\frac{15x-59}{4}=\frac{136-20x}{9}; \qquad x=5.$$

Das vorstehende Verfahren zur Elimination einer Unbekannten besteht darin, daß man sämtliche Gleichungen des gegebenen Systems inbezug auf dieselbe Unbekannte auflöst und die erhaltenen Ausdrücke als gleiche Werte derselben Größe einander gleich setzt, wodurch man eine Eliminati nsgleichung für die in den Ausdrücken enthaltene Unbekannte erhält. Diese Auflösungsart wird Gleichsetzungs- oder Komparationsmethode genannt. Der Theorie nach sehr einfach, führt diese Methode in der praktischen Anwendung, besonders bei Auflösung von Gleichungssystemen mit mehr als zwei Unbekannten, auf weitläufige Rechnungen.

IV. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten.

In der Algebra pflegt man häufig eine allgemeine Zahlgröße, deren Wert vorläufig noch unbestimmt ist, in die Rechnung einzuführen und mit derselben so zu operieren, daß sie weiterhin einen bestimmten Wert erhält. Mit Hilfe des letzteren werden dann die Werte anderer Unbekannten bestimmt, weshalb die eingeführten Größen Bestimmungs- oder Hilfsgrößen genannt werden. Eine solche Hilfsgröße wird bei der folgenden Methode angewendet, um die Unbekannten zu eliminieren.

Gegeben sei das System:

$$1) \quad ax+by=c$$

$$2) \quad a_1x+b_1y=c_1.$$

Auflösung. Multipliziert man Gleichung 1) mit der vorläufig noch unbestimmten (später zu bestimmenden) Hilfs-

größe m, addiert zu (subtrahiert von) der neuen Gleichung die zweite und setzt die Koeffizienten von x und y in Klammern, so entsteht die sogenannte Resolvente*):

$$3)\quad (a_1 + am)x + (b_1 + bm)y = cm + c_1\,.$$

Diese Gleichung hat den Vorzug, daß man aus derselben sowohl x als y sogleich wegschaffen kann. Soll y eliminiert werden, so setze man den Koeffizienten dieser Unbekannten gleich Null, da ein Produkt zu Null wird, wenn ein Faktor desselben den Wert Null hat (§ 40, 2). Dann bleibt:

$$4)\quad (a_1 + am)x = cm + c_1\,.$$

Aus der Bestimmungsgleichung:

$$bm + b_1 = 0 \quad \text{folgt} \quad m = -\frac{b_1}{b}\,.$$

Setzt man diesen Wert statt m in Gleichung 4), so verwandelt sich dieselbe in die Eliminationsgleichung:

$$5)\quad (ab_1 - a_1b)x = b_1c - bc_1\,.$$

Um die Unbekannte x aus Gleichung 3) zu eliminieren, setze man den Koeffizienten von x gleich Null, so bleibt die Gleichung:

$$6)\quad (b_1 + bm)y = c_1 + cm\,.$$

Nun ergiebt sich aus der Bedingungsgleichung:

$$am + a_1 = 0\,, \qquad m = -\frac{a_1}{a}\,.$$

Diesen Wert an Stelle von m in Gleichung 6) gesetzt, liefert die Eliminationsgleichung in y:

$$7)\quad (ab_1 - a_1b)y = ac_1 - a_1c\,.$$

Diese Methode wird nach dem Namen ihres Erfinders, eines französischen Mathematikers, Bézout'sche**) oder schlechtweg französische Methode genannt. Bei Auflösung eines Systems von drei Gleichungen hat man zwei derselben mit Hilfsgrößen m und n zu multiplizieren und die erhaltenen Gleichungen und die dritte zu addieren.***) Um aus dieser

*) Diese Bezeichnung ist von Euler in die Algebra eingeführt worden.

**) Bézout hat diese Methode 1760 veröffentlicht.

***) Man kann die dritte Gleichung auch von der Summe der andern Gleichungen subtrahieren.

neuen Gleichung mit einem Male zwei Unbekannten zu eliminieren, setze man ihre Koeffizienten gleich Null und ermittele aus diesen Bedingungsgleichungen die Werte für m und n. Setzt man diese für die Hilfsgrößen in die Resolvente, so geht letztere in die Eliminationsgleichung der dritten Unbekannten über.

Welches Verfahren von den erläuterten Eliminationsmethoden am schnellsten zum Ziele führt, bleibt in jedem einzelnen Falle dem Urteile des Rechners überlassen. In der Praxis entwickelt man die Werte der Unbekannten eines Systems selten nach einer Methode, sondern man benutzt eine zweckmäßige Verbindung derselben und verwendet auch den gefundenen Wert einer Unbekannten zur Berechnung der andern. Kommen in einem System mit mehr als drei Unbekannten nicht alle in jeder Gleichung vor, so eliminiert man zweckmäßig die Unbekannte zuerst, welche in geringster Anzahl vorhanden ist. Erscheinen in jeder Gleichung alle Unbekannten, so schaffe man zuerst die Unbekannte mit den kleinsten Koeffizienten fort. Dem Lernenden ist sehr zu empfehlen, daß er sich die kürzeste und vorteilhafteste Behandlung gewisser häufig vorkommender Gleichungssysteme wohl merkt.

V. Besondere Behandlung einiger Systeme mit drei Unbekannten.

1) Beispiel. Gegeben:

$$1)\quad x + y = a$$

$$2)\quad y + z = b$$

$$3)\quad x + z = c.$$

Auflösung. Addiert man diese Gleichungen und dividiert die neue Gleichung durch 2, so entsteht:

$$4)\quad x + y + z = \tfrac{1}{2}(a + b + c).$$

Hiervon die gegebenen Gleichungen nacheinander subtrahiert, liefert:

$$x = \tfrac{1}{2}(a + c - b), \qquad y = \tfrac{1}{2}(a + b - c)$$

und

$$z = \tfrac{1}{2}(b + c - a).$$

2) Einige Gleichungssysteme führen auf Gleichungen höheren

Grades, wenn die Brüche aus denselben fortgeschafft werden. So z. B. erhält jede Gleichung des Systems:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} &= k_1 \\ \frac{c}{y} + \frac{d}{z} &= k_2 \\ \frac{m}{x} + \frac{n}{z} &= k_3 \end{aligned}\right\}$$

durch diese Veränderung die Form:

$$Ax + By = Cxy,$$

und solche Gleichungen gehören nach der Erklärung in § 97 wegen des Gliedes Cxy nicht zu jenen vom ersten Grade. Um diese Form zu vermeiden, bestimme man zunächst nicht die Unbekannten selbst, sondern ihre umgekehrten Werte. Führt man nämlich neue Unbekannten ein und setzt etwa:

$$\frac{1}{x} = u, \quad \frac{1}{y} = v, \quad \frac{1}{z} = w,$$

so geht das gegebene System nach Substitution dieser Größen in folgendes über:

$$\left\{\begin{aligned} a \cdot u + b \cdot v &= k_1 \\ c \cdot v + d \cdot w &= k_2 \\ m \cdot u + n \cdot v &= k_3 \end{aligned}\right\}.$$

Hieraus bestimme man nach einer Auflösungsart die Größen u, v, w und mit Hilfe der Ergebnisse die Werte für die Unbekannten x, y und z.

3) Beispiel. Gegeben:

$$1)\ \frac{xy}{x+y} = a, \qquad 2)\ \frac{xz}{x+z} = b, \qquad 3)\ \frac{yz}{y+z} = c.$$

Auflösung. Aus den gegebenen Gleichungen folgt:

$$xy = a(x+y), \qquad xz = b(x+z), \qquad yz = c(y+z).$$

Jede Gleichung durch das Glied auf ihrer linken Seite dividiert, liefert:

$$1 = a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right), \qquad 1 = b\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right), \qquad 1 = c\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Hierdurch ist die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

4) Beispiel. Gegeben:

$$\begin{cases} xy = ax + by \\ yz = cy + dz \\ xz = mx + nz.^{*)} \end{cases}$$

Anleitung zur Auflösung. Dividiert man jede Gleichung durch das Glied auf ihrer linken Seite, so entsteht das bekannte System:

$$\begin{cases} \frac{b}{x} + \frac{a}{y} = 1 \\ \frac{c}{z} + \frac{d}{y} = 1 \\ \frac{m}{z} + \frac{n}{x} = 1. \end{cases}$$

5) In ähnlicher Weise wie vorhin ist das folgende System zu behandeln:

$$\begin{cases} \frac{xy}{ax + a_1 y} = d_1 \\ \frac{xz}{bx + b_1 z} = d_2 \\ \frac{yz}{cy + c_1 z} = d_3. \end{cases}$$

§ 100. Abgekürzte Lösung linearer Gleichungssysteme mittels eines quadratischen Schemas.

a) Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Wenn man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

mittels der Additions- und Subtraktionsmethode auflöst, so muß man, um eine Eliminationsgleichung in x zu erhalten, die erste Gleichung mit b_2, die zweite mit b_1 multiplizieren und die erhaltenen Gleichungen subtrahieren, wodurch man

*) Dieses System wird auch durch die Werte:

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{und} \quad z = 0$$

befriedigt.

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = b_2 c_1 - b_1 c_2$$

erhält. Dividiert man diese Gleichung durch den Koeffizienten von x, so entsteht:

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Wiederholt man dieses Eliminationsverfahren, um den Wert für y zu ermitteln, so ergiebt sich:

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Die Entwickelung jeder Unbekannten erforderte zwei Multiplikationen, eine Subtraktion und eine Division. Daß die Rechenarbeiten, welche die allmähliche Elimination erfordert, sich bei Auflösung eines Systems mit drei Unbekannten erheblich umfangreicher als vorhin gestalten, leuchtet sofort ein. Da bei Bestimmung des Wertes von n Unbekannten aus n linearen Gleichungen diese geistlosen, mechanischen, ermüdenden und zeitraubenden Rechenarbeiten wiederkehren, so liegt die Frage nach einer Auflösungsmethode nahe, durch welche die Operationen wesentlich abgekürzt werden.

Betrachtet man die Bildung der vorhin gefundenen allgemeinen Werte (Formeln) der Unbekannten, so ergeben sich folgende Wahrheiten:

1) die Ausdrücke der Unbekannten erscheinen in Form von Brüchen, welche denselben Nenner haben;

2) Zähler und Nenner dieser Brüche bestehen aus zwei Gliedern, von welchen das erste positiv, das zweite negativ ist;

3) das erste positive Produkt des gemeinschaftlichen Nenners ist aus dem Koeffizienten von x der ersten Gleichung und dem Faktor von y in der zweiten Gleichung gebildet. In ähnlicher Weise ist das zweite negative Glied das Produkt aus dem Koeffizienten von y in der ersten und dem Koeffizienten von x in der zweiten Gleichung.

Wie die Kreuze in nachstehender Darstellung andeuten, hätte man nach Kenntnis dieses Bildungsgesetzes den Nenner sofort hinschreiben können:

$$1)\quad \begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ \times \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix} \qquad \text{oder } 2)\quad \begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & & b_2 . \\ - & & + \end{matrix}$$

4) Auf ähnliche Weise wie der Nenner ist auch der Zähler des Wertes für jede Unbekannte aus den Bekannten c_1, c_2 und den Koeffizienten der andern Unbekannten gebildet. Man erhält den Zähler eines Bruches aus seinem Nenner, indem man die Koeffizienten der gesuchten Unbekannten durch die Absolutglieder c_1 und c_2 ersetzt. Hiernach ergiebt sich also aus dem Schema unter 2) für die Unbekannte x der Zähler:

$$\begin{matrix} c_1 & & b_1 \\ & \times & \\ c_2 & & b_2 \end{matrix} \qquad \text{d. i.}\quad b_2c_1 - b_1c_2;$$

für y der Zähler:

$$\begin{matrix} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{matrix} \qquad \text{d. i.}\quad a_1c_2 - a_2c_1 .$$

Bezeichnet man die Bildung der Produkte in den quadratischen Schemata für die Zähler und Nenner der Formeln für x und y dadurch, daß man jedes Schema durch zwei senkrechte Striche einschließt, so ist:

$$1)\quad x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \qquad 2)\quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Mit Benutzung dieser symbolischen Darstellungen können wir die Werte der Unbekannten aus einem System, in welchem jede Gleichung die Normalform $ax + by = c$ erfüllt, ohne Zwischenrechnung, sofort hinschreiben.

1) Beispiel. Gegeben:

$$\begin{cases} 7x + 5y = 31 \\ 4x + 3y = 18. \end{cases}$$

Auflösung.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 5 \\ 18 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{93 - 90}{21 - 20} = 3;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 31 \\ 4 & 18 \end{vmatrix}}{1} = \frac{126 - 124}{1} = 2.$$

2) Beispiel. Gegeben:

$$\begin{cases} 9x - 11y = 44 \\ 5x - 7y = 20. \end{cases}$$

Auflösung.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 44 & -11 \\ 20 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -11 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-308 + 220}{-63 + 55} = 11;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 44 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{180 - 220}{-8} = 5.$$

Anmerkung. Aus diesen Beispielen dürfte erhellen, daß die Auflösung eines Gleichungssystems mit Hilfe des „quadratischen Schemas" im allgemeinen große Vorteile vor den andern Eliminationsmethoden bietet. Da der Nenner der Bruchwerte unveränderlich ist, so braucht man denselben nur einmal anzuschreiben und zu berechnen. Bei einiger Übung kann der Rechner die Darstellung des Schemas unterlassen und aus dem gegebenen System die Ergebnisse sofort in Bruchform hinschreiben. Durch diese Abkürzung wird im Vergleich mit der vollständig ausgeführten Additions- und Subtraktionsmethode das Anschreiben von 25 Zahlzeichen erspart.

Wenn der Wert des Schemas $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ gleich Null ist, so muß $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ sein, in diesem Falle sind die Werte für x und y unendlich groß, d. h. das System kann durch endliche Zahlenwerte nicht befriedigt werden. Sind gleichzeitig auch die Schemata der Zähler der Null gleich, ist also

$c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0$ und $a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$, so muß stets $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ sein, und jede Unbekannte hat den Wert $\frac{0}{0}$ (§ 40). Alsdann sind die gegebenen Gleichungen abhängig voneinander, jeder Unbekannten genügt ein beliebiger Zahlenwert, aber keiner von ihnen liefert eine Auflösung des Systems (§ 97).

b) Gleichungen mit drei Unbekannten.

Löst man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

auf, so erhält man:

$$1) \quad x = \frac{d_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + d_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + d_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)}.$$

Bezeichnen wir den Nenner dieses Bruches zur Kürze mit R*), so ist:

$$2) \quad y = \frac{a_1(d_2 c_3 - d_3 c_2) + a_2(d_3 c_1 - d_1 c_3) + a_3(d_1 c_2 - d_2 c_1)}{R}.$$

$$3) \quad z = \frac{a_1(b_2 d_3 - b_3 d_2) + a_2(b_3 d_1 - b_1 d_3) + a_3(b_1 d_2 - b_2 d_1)}{R}.$$

Die Werte der Unbekannten erscheinen auch hier in **Brüchen mit gemeinschaftlichem Nenner**. Eine aufmerksame Betrachtung zeigt, daß der Zähler eines jeden Bruches aus seinem Nenner hervorgeht, wenn man an Stelle der Koeffizienten der gesuchten Unbekannten die Absolutglieder d_1, d_2 und d_3 setzt. Die aus den Formeln für die Auflösung eines Systems mit 2 Unbekannten gefolgerten Wahrheiten werden also auch von den allgemeinen Werten der Unbekannten eines Systems aus drei Gleichungen ausgesprochen.

Stellen wir den gemeinschaftlichen Nenner obiger Brüche durch das unter a) eingeführte quadratische Schema dar und bezeichnen den Wert des ersteren durch R**), so haben wir:

---

*) **Lagrange** benutzt das Zeichen Δ.

**) Wie viele Rechnungen und Schreibereien von Buchstaben zur

$$4)\quad R = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Kürzer kann man diesen Nenner durch ein quadratisches Schema aus den Koeffizienten der Unbekannten des vorgelegten Gleichungssystems bezeichnen, nämlich:

$$5)\quad R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Um den Wert dieses Schemas zu berechnen, kann die Formel unter 4) benutzt werden. So ist z. B.:

$$R = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 15 & 5 & 6 \\ 24 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 24 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -18 + 90 - 72 = 0.$$

Zur schnellen praktischen Auswertung eines quadratischen Schemas aus 9 Zahlgrößen giebt es ein einfaches Verfahren, welches durch nachstehendes Schema veranschaulicht werden soll.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 15 & 5 & 6 \\ 24 & 8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 2 \\ 15 & 5 \\ 24 & 8 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{-}\qquad\underbrace{\qquad}_{+}$$

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{-}\qquad\underbrace{\qquad}_{+}$$

Wie man ersieht, sind dem ursprünglichen Schema rechts die beiden ersten Vertikalreihen beigefügt. Aus dem erhaltenen Schema findet man die drei positiven Glieder, wenn man

---

Auffindung dieser Werte erforderlich sind, das möge der Lernende selbst berechnen.

die Zahlgrößen in der Richtung der Diagonale von a_1 nach c_3 sowie die einer jeden mit dieser parallel laufenden Diagonale zu Produkten verbindet. Die negativen Glieder ergeben sich, indem man die Zeichen in der Diagonalrichtung von a_3 nach c_1 und die Zahlen, die in jeder der beiden mit dieser Richtung parallel laufenden Geraden liegen, zu Produkten vereinigt.

Da, wie bereits oben gesagt worden ist, der Zähler des Wertes einer jeden Unbekannten aus dem Nenner des Bruches hervorgeht, indem man an Stelle der Koeffizienten dieser Unbekannten die Absolutglieder setzt, so muß auch das quadratische Schema für die Zähler von x, y, z aus obigem Schema des Nenners entstehen, wenn die Koeffizienten dieser Unbekannten durch die Bekannten d_1, d_2 und d_3 ersetzt werden. Die allgemeinen Formeln der Unbekannten können daher kurz in folgender Weise dargestellt werden:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{R}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{R}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{R}.$$

Nun sind wir imstande, mit Hilfe des quadratischen Schemas auch Gleichungssysteme mit drei Unbekannten unmittelbar aufzulösen:

1) Beispiel. Gegeben:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 7 \\ 3x - 2y + z = 6 \\ x + y - 3z = 2. \end{cases} \qquad R = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 15.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{15} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{15} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{15} = 1$$

2) Beispiel. Gegeben:

$$\begin{cases} x + \;\; y + \;\; z = 5 \\ 3x - 5y + 7z = 75 \\ 9x - 11z + 10 = 0. \end{cases} \qquad R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 7 \\ 9 & 0^{*)} & -11 \end{vmatrix} = 196.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 75 & -5 & 7 \\ -10 & 0 & -11 \end{vmatrix}}{196} = 5;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 75 & 7 \\ 9 & -10 & -11 \end{vmatrix}}{196} = -5; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 75 \\ 9 & 0 & -10 \end{vmatrix}}{196} = 5.$$

Determinanten.

§ 101. Begriff einer Determinante; Lehrsätze über ihre Wertbeständigkeit.

Im vorigen Paragraphen haben wir ersehen, daß die Benutzung der quadratischen Schemata für die Auflösung gewisser linearer Gleichungssysteme erheblichen Vorteil gewährt, indem man ohne jede Zwischenrechnung die Werte der Unbekannten darstellen kann. Da nun gewisse Eigenschaften dieser Schemata zur Auswertung derselben eine wesentliche Abkürzung gewähren, und auch die Theorie jener eigentümlichen symbolischen Ausdrücke in neuerer Zeit eine hervorragende Bedeutung erlangt hat, so erscheint es angezeigt, die Anfänge dieser Klasse von Ausdrücken zu erläutern.

a) Begriffe. Man nennt den gemeinsamen Nenner der Bruchwerte der Unbekannten eines linearen Gleichungssystems, also die durch die quadratischen Schemata

$$1) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad 2) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

---

*) Wenn in einer Gleichung eine Unbekannte fehlt, so bezeichnet man den Koeffizienten derselben mit 0. Man könnte die dritte Gleichung des Systems auch so schreiben:

$$9x + 0 \cdot y - 11z = -10.$$

bezeichneten algebraischen Summen: 1) $a_1 b_2 - a_2 b_1$ und 2) $a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$ die **Determinante** dieses Systems.

Eine Determinante wird also kurz dargestellt, indem man 4, 9, 16 $\cdots n^2$ gegebene Zahlgrößen in n wagerechte und in n senkrechte Reihen, in Form eines Quadrates, ordnet, und die Zahlen durch zwei senkrechte Striche einschließt. Die in dem Schema zusammengestellten Zeichen heißen **Elemente**, die wagerechten Reihen werden auch kurzweg **Zeilen**, die senkrechten **Kolonnen** genannt. Ein Element, welches in gerader Reihe an gerader Stelle oder in ungerader Reihe an ungerader Stelle steht, nennt man **gerade**, alle übrigen Elemente sind **ungerade**. Die einzelnen Produkte der durch das Schema bezeichneten algebraischen Summe heißen **Glieder** der Determinante. Unter Determinante eines Systems von n^2 Elementen versteht man die algebraische Summe von Produkten, die aus den Elementen nach folgendem Gesetz gebildet sind: Jedes Produkt besteht aus n Faktoren und es darf aus jeder Zeile und Kolonne nur ein Element enthalten. Bei einem Schema aus 4 Größen ist das Glied aus den Elementen in der Richtung der Hauptdiagonale, nämlich das Produkt $a_1 b_2$ positiv, während das Glied der Nebendiagonale $a_2 b_1$ negativ ist. Dieselbe Regel gilt auch für die Auswertung eines Schemas aus 9 Elementen, wenn man demselben rechts die beiden ersten Kolonnen beifügt (§ 100). Eine Determinante aus 4, 9, n^2 Elementen wird eine Determinante 2ten, 3ten, $n$ten **Grades** genannt, weil ihre Glieder Produkte aus 2, 3, n Faktoren sind.

Wie vorhin bemerkt worden ist, darf eine Größe des Schemas, z. B. a_1 nicht mit den Elementen in derselben Zeile und Kolonne verbunden werden. Deuten wir mittels Schema vom zweiten Grade die Elemente an, mit welchem a_1 in der Determinante unter 2) verknüpft werden darf, und bezeichnen das Schema zweiten Grades mit A_1, so hat man:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 - b_3 c_2 .$$

Diese Determinante zweiten Grades nennt man die dem Elemente a_1 zugehörige Unterdeterminante. Für jedes Element eines Schemas dritten Grades giebt es eine ihm zugehörige Unterdeterminante; dieselbe wird dem Gebrauche gemäß durch den dem Elemente entsprechenden Großbuchstaben bezeichnet. Gehört die Unterdeterminante einem geraden Element zu, so ist ihr Vorzeichen positiv, im andern Falle negativ. Die Determinante dritten Grades kann also kurz durch

$$R_3 = aA_1 - a_2A_2 + a_3A_3$$

bezeichnet werden.

Zufolge des § 100 und des Vorangehenden sind wir nun berechtigt, folgenden Lehrsatz aufzustellen.

Lehrsatz: Der Wert jeder Unbekannten eines linearen Gleichungssystems ist einem Bruche gleich, dessen Nenner stets als die Determinante aus den Koeffizienten der Unbekannten erscheint und dessen Zähler-Determinante aus dem Nenner durch Einsetzung der bekannten Glieder an Stelle der Koeffizienten der gesuchten Unbekannten hervorgeht.

b) Lehrsätze über die Wertbeständigkeit der Determinante. Vertauscht man in der Determinante $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$ die Elemente in der ersten Zeile mit den Elementen in der ersten Kolonne, so hat man das Schema $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$. Der Wert der Determinante beträgt $50 - 48 = 2$, der zweiten ebenfalls 2. Durch die Vertauschung ist also der Wert der Determinante unverändert geblieben. Allgemein ist:

$$R_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 .$$

1) **Lehrsatz:** Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man sämtliche Elemente einer Horizontalreihe mit den Elementen einer Vertikalreihe vertauscht.

Der Wert der Determinante $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ beträgt offenbar $35 - 12 = 23$. Vertauschen wir die beiden Vertikalreihen und die wagerechten Reihen miteinander, so erhalten wir die beiden Schemata

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Der Wert der letztern ist $12 - 35 = -23$. Durch die Vertauschung hat also nur eine Änderung des Vorzeichens, nicht des absoluten Wertes stattgefunden. Allgemein ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1; \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - a_1 b_2;$$

$$\text{also} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

2) **Lehrsatz:** Wenn man in einer Determinante zwei Zeilen oder zwei Kolonnen miteinander vertauscht, so ändert die Determinante nur ihre Vorzeichen, nicht ihren absoluten Wert.

$$R_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Erklärung: Addiert man die erste und dritte Horizontalreihe in der ersten, so hat man die zweite Determinante. Wird in letzterer das doppelte Produkt der zweiten Zeile von der ersten subtrahiert, so erhält man die dritte Determinante. Die Werte sämtlicher Determinanten sind einander gleich, nämlich $R_3 = 0$. Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn man den Wert jeder dieser drei Systeme nach dem in § 100 angegebenen Verfahren berechnet. Durch die Veränderungen, welche mit obigen Determinanten vorgenommen sind, ist daher ihr Wert nicht verändert worden. Allgemein ist:

$$R_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm m b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm m b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm m b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3) **Lehrsatz:** Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn man zu den Elementen einer Vertikalreihe oder Horizontalreihe ein beliebiges Vielfache einer andern Kolonne oder Zeile addiert oder von derselben subtrahiert.

Dieser letztere Lehrsatz ist für das praktische Rechnen mit Determinanten von Wichtigkeit. Denn mit Hilfe desselben kann man, wie aus obigem Beispiele hervorgeht, die Glieder einer Determinante auf eine geringere Anzahl reduzieren und dadurch die Rechnung abkürzen. Diese Reduktion besteht darin, daß man mehrere Elemente auf Null bringt, wodurch alle Glieder der Determinante, in denen ein Faktor Null ist, verschwinden.

Hier folgen zu obigem Lehrsatz noch einige Beispiele:

$$R_3 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} 27 & 9 & 4 \\ 18 & 6 & 7 \\ 13 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 63 - 24 = 39.$$

Beispiel (zum folgenden Lehrsatze):

$$R = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \left.\begin{matrix} +3\cdot 7\cdot 5 \\ +4\cdot 8\cdot 3 \\ +5\cdot 6\cdot 4 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} -5\cdot 7\cdot 3 \\ -3\cdot 8\cdot 4 \\ -4\cdot 6\cdot 5 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Allgemein ist:

$$R_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4) **Lehrsatz:** Wenn in dem Schema einer Determinante zwei gleiche Parallelreihen vorkommen, so ist der Wert der Determinante gleich Null.

Beweis. Vertauscht man die zwei gleichen Parallelreihen, so ändert die Determinante nach dem zweiten Lehrsatze ihr Vorzeichen, es wird also aus R_3 der Wert $-R_3$. Da

nun wegen der gleichen Elemente durch die Vertauschung nichts geändert wird, so muß $R_3 = -R_3$ sein, was nur möglich ist, wenn R den Wert Null hat (§ 32).

Geschichtliches. Die in den §§ 100 und 101 behandelten algebraischen Ausdrücke in Form quadratischer Schemata, welche den Namen „Determinanten" führen, hat zuerst der große Mathematiker und Philosoph Leibniz entdeckt und das Prinzip dieses Algorithmus*) dem französischen Mathematiker l'Hopital in einem Briefe (1693) mitgeteilt. Allein die Entdeckung fand keine weitere Beachtung. Die Anwendung der Determinanten zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems hat zum zweiten Male Cramer (1750) gezeigt, und nach ihm heißt diese Auflösungsmethode auch Cramersche Regel. Günther**) teilt uns mit, daß der Name „Determinanten der quadratischen Formen" von Gauß***) herrühre. Der eigentliche Begründer der Determinantenlehre ist der französische Mathematiker Cauchy (1812), der die von Gauß geschaffene Bezeichnung beibehalten hat („le déterminant"). Die erste vollständige Schrift über die Theorie dieses Ausdrucks hat Jacobi (1841) veröffentlicht. Sylvester drückt sich über die Determinanten folgendermaßen aus: „Was ist im Grunde genommen die Theorie der Determinanten? Es ist eine über der Algebra stehende Algebra, ein Rechnungsverfahren, welches uns in den Stand setzt, die Resultate der algebraischen Operationen zu kombinieren und dieselben vorauszusagen, ähnlich, wie wir uns mit Hilfe der Algebra der besondern Operationen der Arithmetik entheben können."

§ 102. Auflösung eingekleideter Gleichungsaufgaben mit mehreren Unbekannten.

Kommen in einer angewandten Gleichungsaufgabe mehrere Unbekannten vor, so kann man jede vorläufig durch einen Buchstaben x, y, z u. s. w. ausdrücken, aus den Bedingungen der

*) Der Gelehrte Mohammed ben Musa, Verfasser einer Schrift über indisches Rechnen, wurde später nach seinem Heimatlande Chowaresmien Alchwarizmî genannt. Aus diesem Namen entstand Algorithmi und durch Übertragung dieses Namens vom Verfasser auf die Schrift bildete sich das Wort Algorithmus. Mit letzterem bezeichnet man jetzt jedes zur Regel gewordene Rechnungsverfahren.

**) „Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studierende", Erlangen bei Besold.

***) Disq. arithm. Seite 301 u. f.

Aufgabe so viele unabhängige Gleichungen herleiten, als Unbekannten gesucht werden, und das aufgestellte System auflösen. Jede gebildete Gleichung muß eine neue Bedingung aussprechen. Bei der Herleitung des Gleichungssystems befolge man die in § 91 enthaltenen Regeln und Fingerzeige. Fordert eine Aufgabe die Entwickelung von $m + n$ Unbekannten, während sie nur die Bedingungen für Bildung von m Gleichungen enthält, so heißt die Aufgabe unbestimmt. Im allgemeinen ist dem Rechner zu empfehlen, nicht mehr Unbekannten einzuführen, als zur Auflösung der Aufgabe nötig sind. Ist aus den gegebenen Größen nur eine Unbekannte berechnet, so kann man mittels des Ergebnisses leicht die andern gesuchten Zahlen bestimmen. Der Lernende versuche, mehrere Gruppen von Aufgaben nicht bloß einer verschiedenen algebraischen Behandlung (durch Einführung mehrerer und einer Unbekannten) zu unterwerfen, sondern bemühe sich auch, auf den in § 92 angegebenen andern Wegen Auflösungen zu liefern.

Beispiele.

I) Aufgabe. Zwei Knaben haben Äpfel. Wenn Anton 10 von seinen Äpfeln dem Franz giebt, so haben beide gleichviel; giebt aber Franz 2 von seinen Äpfeln dem Anton, so hat der letztere 7mal so viel als Franz. Wie viel Äpfel besitzt jeder Knabe?

1) Algebraische Auflösung. Bezeichnet man die Anzahl Äpfel des Anton mit x, die des Franz mit y, so liefern die Bedingungen der Aufgaben folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} x - 10 = y + 10 \\ x + \ \ 2 = 7(y - 2). \end{cases}$$

2) Algebraische Lösung. Man suche zunächst die Summe Äpfel, welche beide Knaben zusammen besitzen. Heißt dieselbe s, so hatte Anton vor der ersten Verteilung $\frac{s}{2} + 10$ und Franz $\frac{s}{2} - 10$. Nach der zweiten Verteilung würde Anton $\frac{s}{2} + 10 + 2$, der andere Knabe dagegen $\frac{s}{2} - 10 - 2$ Äpfel besitzen. Da der erstere Knabe jetzt 7mal so viel Äpfel als Franz hätte, so ist:

$$\frac{s}{2} + 12 = 7\left(\frac{s}{2} - 12\right); \qquad \text{folglich} \quad s = 32.$$

3) Algebraische Lösung. Aus der Thatsache, daß beide Knaben nach der ersten Verteilung gleichviel Äpfel besitzen würden, schließt man, daß Anton ursprünglich 20 Äpfel mehr als Franz hat. Bezeichnet man die Anzahl Äpfel des letzteren mit x, so ergiebt sich leicht folgende Gleichung:

$$x + 20 + 2 = 7(x - 2); \qquad x = 6.$$

4) Auflösung mittels zeichnerischer Darstellung (Fig. 82). Die Anzahl Äpfel des Anton werde durch die Strecke AB und die Zahl, welche die Äpfel von Franz angiebt, durch die Strecke EF versinnlicht. Giebt Anton 10 Äpfel an Franz ab, so besitzen beide Knaben gleichviel. Dies veranschaulichen wir, indem wir von der Strecke AB vom Punkte B aus ein Stück BC abschneiden und EF bis G verlängern. Die Zeichnung zeigt nun offenbar, daß die Strecke AB um $2 \times FG$ größer als EF ist, d. h. im arithmetischen Sinne: Anton hat ursprünglich 20 Äpfel mehr als Franz. Bei der zweiten Verteilung giebt letzterer 2 Äpfel dem andern Knaben: der jetzige Vorrat von Franz wird durch die Strecke EH und der des Anton durch AD versinnlicht. Nach der Zeichnung ist AD um das Stück DK größer als EH; Strecke DK veranschaulicht

1) die Zahl 24

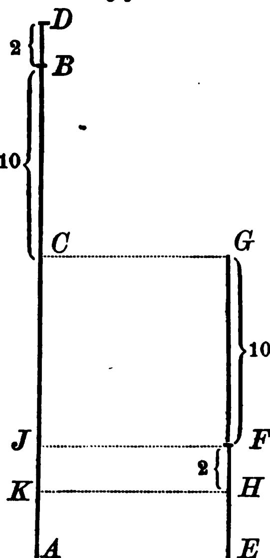
und 2) $6 \times EH$.

Der Abschnitt EH bezeichnet also

$\frac{1}{6}$ von $24 = 4$

und mithin versinnlicht EF die Zahl 6 und die Strecke AB die Zahl 26. Anton hatte daher 26 Äpfel und Franz 6 Äpfel.

Fig. 82.



5) Arithmetische Lösung. Man erhält eine rein arithmetische Auflösung, wenn man die Ergebnisse der vorigen durch bloße Schlüsse entwickelt. Nach der Aufgabe hätten beide Knaben gleichviel, wenn Anton 10 von seinen Äpfeln dem Franz gäbe. Hieraus schließen wir auf einen Unterschied von 20 Äpfeln, so daß Anton diese Anzahl mehr hat als Franz. Giebt letzterer 2 Äpfel an Anton ab, so wird der bestehende Unterschied um 4 Äpfel größer, mithin hätte jetzt Anton 24 Äpfel mehr als der andere Knabe. Zufolge Bedingung der Aufgabe besäße Anton aber auch 7mal soviel Äpfel als Franz, d. h. er hätte 1) die jetzige Anzahl Äpfel von Franz und 2) noch das Sechsfache derselben mehr als

jener. Folglich muß das Sechsfache der Äpfel des Franz 24 Äpfel, d. i. das Einfache 4 Äpfel betragen, u. s. w.

6) Arithmetische Lösung. Man berechne zuerst die Summe der Äpfel beider Knaben. Nach der ersten Verteilung hätte jeder Knabe die Hälfte aller Äpfel, nach der zweiten würde A. $\frac{7}{8}$ dieser Summe und F. $\frac{1}{8}$ derselben besitzen. Gesetzt nun, die Summe betrage vorläufig 8 Äpfel*), so hätte

nach der 1) Verteilung	A. 4 Äpfel	und	F. 4 Äpfel;
" " 2) "	A. 7 "	"	F. 1 Apfel
	3 Äpfel.		3 Äpfel.

Der Unterschied der Anzahl Äpfel nach der ersten und zweiten Verteilung beträgt bei jedem Knaben 3 Äpfel. Laut Bedingung der Aufgabe ändert sich der Vorrat Äpfel eines jeden Knaben durch die Verteilung um:

10 Äpfel + 2 Äpfel = 12 Äpfel.

Dieser Unterschied ist 4mal so groß als der durch die Annahme erhaltene und folglich ist die wirkliche Summe Äpfel der Knaben auch:

4 × 8 Äpfel = 32 Äpfel.

Hiervon würde jeder Knabe nach der ersten Verteilung die Hälfte, d. i. 16 Äpfel besitzen; also hatte A. 26 Äpfel und F. 6 Äpfel.

7) Auflösung durch die Regel des doppelten falschen Ansatzes. Zufolge der zweiten Bedingung der Aufgabe soll F. 2 Äpfel an A. abgeben und dieser alsdann 7mal so viel als F. besitzen. Diese Bedingung ist in Wirklichkeit nur erfüllbar, wenn F. wenigstens 3 Äpfel hat. Um der ersten Bedingung gerecht zu werden, muß man für A. 23 Äpfel annehmen. 1) Gesetzt, beide Knaben hätten zusammen 26 Äpfel, dann besäße nach der zweiten Verteilung F. 1 Apfel und A. 25 Äpfel. Laut der Aufgabe müßte letzterer 7mal so viel als F., d. i. 7 Stück besitzen; folglich ist die erste Abweichung 25 — 7 = 18. 2) Angenommen, die ganze Summe betrage 28 Äpfel, dann würde nach der zweiten Verteilung F. 2 und A. 26 Stück besitzen. Nun sollte zufolge Bedingung der Aufgabe A. 7 × 2 Äpfel = 14 Äpfel haben; mithin ist der zweite Fehler 26 — 14 = 12. Durch die zweite Annahme hat der Fehler um 18 — 12 = 6 abgenommen, damit er verschwindet, muß die Zahl 28 so oft um 2 vermehrt werden, als 6 in 12 enthalten ist. Folglich besaßen beide Knaben zusammen 32 Äpfel.

II) Aufgabe. Von einer Summe Geldes erhalten A und B zusammen $a = 25$ ℳ, B und C zusammen $b = 32$ ℳ und die Anteile des A und C betragen zusammen $c = 48$ ℳ. Wie groß ist der Anteil jeder Person?

*) Einfache Regel falsi.

Algebraische Auflösung. Bezeichnet man die gesuchten Anteile der drei Personen mit x, y und z, so liefern die Bedingungen der Aufgabe folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} x + y = 25 = a \\ y + z = 32 = b \\ x + z = 48 = c. \end{cases}$$

Die Auflösung dieses Systems in allgemeinen Zahlen liefert (§ 99) die Werte:

$$x = \tfrac{1}{2}(a + c - b), \qquad y = \tfrac{1}{2}(a + b - c)$$
$$\text{und} \qquad z = \tfrac{1}{2}(b + c - a).$$

Diese abstrakten Zahlenwerte für die Unbekannten kann man durch folgende geometrische Darstellung versinnlichen. Man zeichne aus drei Strecken, deren Längen den Zahlen a, b und c entsprechen, ein Dreieck und beschreibe in dasselbe den Berührungskreis. Alsdann veranschaulichen die Abschnitte, welche durch die Berührungspunkte auf den Seiten des Dreiecks gebildet werden, die Werte der Unbekannten. Die vorhin gefundenen Ausdrücke für x, y und z kann man aus der Figur unmittelbar ablesen.*)

III) Aufgabe. An einem Werke würden A und B zusammen 12 Tage, B und C gemeinschaftlich 15 Tage und A und C 20 Tage lang arbeiten müssen. a) In wieviel Tagen würde jede Person allein die Arbeit ausführen? b) In welcher Zeit wird das Werk vollendet, wenn die drei Personen gemeinsam arbeiten?

Auflösung. A und B verrichten zusammen in 1 Tage (unter sonst gleichen Umständen) $\frac{1}{12}$ des Werkes, B und C leisten in 1 Tage $\frac{1}{15}$ und A und C in derselben Zeit $\frac{1}{20}$ der ganzen Arbeit. Bezeichnet man die Zeiten, in welchen jede Person allein das Werk ausführt, mit x, y und z, so bestehen folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{15} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{20}. \end{cases}$$

*) Im 16. Jahrhundert kennzeichnet sich die Mathematik durch beständige innige Verknüpfung zwischen Algebra und Geometrie. J. B. Benedetto benutzt in seiner Schrift: „Diversarum speculationum math. et physis. Liber“, Turin 1585, beständig geometrische Betrachtungen, um arithmetische und algebraische Gesetze und Regeln zu erläutern und zu beweisen. Die vorstehend gelöste Aufgabe bietet ein vortreffliches Beispiel

Nach der in § 99 angegebenen Auflösungsweise findet man $x = 30$, $y = 20$ und $z = 60$. Hieraus ergiebt sich weiter, daß die drei Arbeiter in 10 Tagen gemeinschaftlich das Werk vollenden können.

IV) Aufgabe. Man hat drei Körbe mit Äpfeln. Schüttet man aus dem ersten Korbe $\frac{1}{4}$ seines Inhaltes in den zweiten, von der nunmehrigen Anzahl des zweiten soviel Äpfel in den dritten, als sich schon darin befinden und endlich aus diesem $\frac{1}{3}$ seines jetzigen Inhaltes in den ersten, so sind in diesem 80, im zweiten 50 und im dritten 40 Äpfel. Wieviel Äpfel befanden sich anfangs in jedem Korbe?

1) Die Auflösung durch das Umkehrungsverfahren ist aus folgender Darstellung ersichtlich:

	A	B	C
4)	80 Äpfel	50 Äpfel	40 Äpfel
3)	60 "	50 "	60 "
2)	60 "	80 "	30 "
1)	80 "	60 "	30 "

2) Algebraische Lösung. Das gesuchte Gleichungssystem lautet:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}z = 80 \\ \frac{1}{4}x + y - z = 50 \\ 2z - \frac{2}{3}z = 40\,. \end{cases}$$

Gleichungen vom zweiten Grade.

§ 103. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Begriff. Erscheint nach dem Ordnen und gehöriger Reduktion einer Gleichung die Unbekannte mit dem Potenzexponenten 2 behaftet, so ist die Gleichung eine quadratische oder vom zweiten Grade. Die allgemeine Form einer auf Null reduzierten quadratischen Gleichung ist:

$$1)\quad ax^2 \pm bx \pm c = 0.$$

Wird in vorstehender Gleichung der Koeffizient a gleich Null, so verwandelt sich dieselbe in die Gleichung ersten Grades:

$$bx \pm c = 0.$$

---

für die Methode, welche Benedetto in seinem Buche befolgt. Auch Lukas de Borgo, Cardan und Tartalea machen in ihren algebraischen Schriften an vielen Stellen von der Geometrie Gebrauch.

Wenn das freie Glied c den Wert Null annimmt, so entsteht die quadratische Gleichung:

$$ax^2 \pm bx = 0,$$

welche, durch die Unbekannte dividiert, ebenfalls in die einfache Gleichung:

$$ax \pm b = 0$$

übergeht. Dividiert man die Gleichung 1) durch den Koeffizienten von x, so entsteht:

$$x^2 \pm \frac{b}{a}x \pm \frac{c}{a} = 0.$$

Der Kürze wegen setzen wir in dieser Gleichung:

$$\frac{b}{a} = p \quad \text{und} \quad \frac{c}{a} = q,$$

so geht dieselbe in die folgende über:

$$2) \quad x^2 \pm px \pm q = 0$$

oder, wenn man das freie Glied q auf die rechte Seite setzt:

$$3) \quad x^2 \pm px = \pm q.$$

Die Schemata unter 2) und 3) nennt man die Normalformen (Seite 268) einer quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten, in welcher die Buchstaben p und q bekannte positive und negative Zahlen (einschließlich der Null) bezeichnen.

Arten. Die Gleichungen zweiten Grades werden in zwei Arten unterschieden. Tritt die Unbekannte in der ersten und der zweiten Potenz auf, so nennt man die Gleichung eine vollständige*) oder gemischte quadratische. Ihr Schema ist die Gleichung unter 3). Kommt dagegen die Unbekannte nur in der zweiten Potenz vor, so heißt die Gleichung eine reine quadratische. Die Normalform der letzteren geht aus 3) hervor, wenn $p = 0$ wird, wodurch die Gleichung $x^2 = q$ entsteht.

§ 104. **Auflösung der reinen quadratischen Gleichung; Wurzeln derselben.**

Vor Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung bringe man sie auf die Form $x^2 = q$, d. h. man sorge, daß das

*) Weil in der Potenzreihe der Unbekannten kein Glied fehlt.

positive und mit dem Koeffizienten 1 behaftete Quadrat der Unbekannten auf einer Seite der Gleichung allein steht. Ist die Unbekannte mit einem höheren Koeffizienten als 1 verbunden, so muß man dieselbe von diesem Faktor dadurch befreien, daß man sämtliche Glieder der Gleichung durch den Koeffizienten dividiert (§ 85, 3).

Die Auflösung einer auf die Normalform gebrachten reinen quadratischen Gleichung geschieht dadurch, daß man aus beiden Seiten derselben die Quadratwurzel zieht. Wie die reine quadratische, so wird auch jede reine Gleichung höheren Grades gelöst: Man bringt die mit der $n$ten Potenz behaftete Unbekannte allein auf eine Seite und radiziert die Gleichung mit dem Wurzelexponenten n. (Man vergleiche § 85, 5.)

Die Wurzeln der reinen quadratischen Gleichung. Wenden wir das vorhin angegebene Verfahren auf die Gleichungen:

$$x^2 = 144 \quad \text{und} \quad x^2 = q$$

an, so erhalten wir:

$$x = \sqrt{144} = 12 \quad \text{und} \quad x = \sqrt{q}.$$

Da aber die Quadratwurzel aus einem positiven Radikanden zwei absolut gleiche, algebraisch entgegengesetzte Werte liefert (Seite 120, 1) Lehrsatz), so ist:

$$x_1 = +12, \quad x_2 = -12; \qquad x_1 = +\sqrt{q}, \quad x_2 = -\sqrt{q},$$

was kurz: $\quad x = \pm 12, \quad x = \pm\sqrt{q}$

bezeichnet wird. Ist in einem besondern Falle der Radikand q Null, so sind die beiden Wurzeln einander gleich, nämlich $= 0$. Stellt endlich der Radikand eine negative Zahl dar, ist etwa $x^2 = -36$, so giebt es weder eine positive noch eine negative Zahl, welche x genügt, da sowohl $(+6)^2$ als auch $(-6)^2$ stets $+36$, aber niemals -36 giebt. Gleichungen von der Form $x^2 = -q$ können also durch keine der bisher betrachteten Zahlformen befriedigt werden.*) (Vergleiche den

*) Die Auflösung solcher reinen quadratischen Gleichungen, in welchen das Absolutglied q negativ ist, erfordert die Einführung einer neuen Zahlform, nämlich der imaginären Zahl (§ 116).

Schluß von § 42.) Wir schließen daher vorläufig die Lösung von Gleichungen aus, in welchen q eine negative Zahl bezeichnet. Der

Lehrsatz: Jede reine quadratische Gleichung hat zwei absolut gleiche, algebraisch entgegengesetzte Wurzeln,

läßt sich auf folgende Weise auch aus dem inneren Wesen dieser Gleichung begründen. Setzt man in der Normalform statt q den gleichartigen Ausdruck $(\sqrt{q})^2$ und bringt die Gleichung auf Null, so hat man:

$$x^2 - (\sqrt{q})^2 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann nach § 16, 7 β zerlegt werden, es ist nämlich:

$$x^2 - (\sqrt{q})^2 = (x + \sqrt{q})(x - \sqrt{q}) = 0.$$

Da aber ein Produkt zu Null wird, wenn ein Faktor desselben Null ist (§ 40, 2), so kann man die quadratische Gleichung in folgende einfachen Gleichungen zerlegen:

$$1) \quad x + \sqrt{q} = 0,$$

$$2) \quad x - \sqrt{q} = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind nach § 88, 2) Lehrsatz auch die Wurzeln der ursprünglichen quadratischen Gleichung. Aus 1) folgt $x = -\sqrt{q}$ und aus 2): $x = +\sqrt{q}$. Hieraus ergiebt sich der sehr klare, innere Grund, weshalb die reine quadratische Gleichung zwei Wurzeln hat.

§ 105. **Methoden zur Auflösung der gemischten quadratischen Gleichung.**

Nach § 103 ist die Normalform einer vollständigen quadratischen Gleichung:

$$x^2 \pm px = \pm q.$$

Zum Zwecke der Auflösung führe man die vorgelegte quadratische Gleichung auf diese Normalform zurück.

a) Methoden von Mohammed ben Musa.

Dieser arabische Mathematiker benutzt zur Auflösung der Gleichung:

$$x^2 + 10x = 39^{*}), \quad \text{allgemein} \quad x^2 + px = q,$$

ein Verfahren, welches eine zweckmäßige, anschauliche Methode ist und zugleich auch einen klaren, geometrischen Beweis für die Richtigkeit des eingeschlagenen Weges liefert.

1) Man zeichne eine Strecke AB (Fig. 33), welche den Wert für x versinnliche; beschreibt man über AB das Quadrat, so ist dies ein Bild des Ausdrucks x^2. An jede Quadratseite lege man ein Rechteck; die vier Rechtecke sind in der Zeichnung mit a, b, c, d bezeichnet und haben gleichen Inhalt. Dieselben veranschaulichen das Produkt $10x$; mithin versinnlicht die Breite eines dieser Rechtecke die Zahl $10x : 4x = \frac{5}{2}$. Ergänzt man die Figur durch die vier Eckquadrate e, f, g, h, welche die Zahl $4 \cdot (\frac{5}{2})^2 = 25$ bezeichnen, zu einem Quadrat, so versinnlicht dieses den Ausdruck $x^2 + 10x + 25$ oder die Zahl:

Fig. 33.

h	c	g
d	A B	b
e	a	f

$$(39 + 25 =) 64.$$

Die Seite des großen Quadrates bezeichnet daher einerseits $\sqrt{x^2 + 10x + 25} = x + 5$ und andererseits die $\sqrt{64} = 8$.

*) Die dieser Gleichung entsprechende Wortaufgabe von Mohammed lautet: „Ein Quadrat und 10 seiner Wurzeln sind gleich 39, d. h. wenn du zu einem Quadrate 10 Wurzeln desselben addierst, so beträgt die Summe 39. Wie heißt die Wurzel?“ Dann sagt er: „Die Auflösung besteht darin, daß du die Anzahl der Wurzeln halbierst, und das macht in diesem Beispiel 5; dann multiplizierst du dieses mit sich selbst, so kommt 25 heraus. Hierauf addierst du dieses zu 39, das macht 64; daraus ziehst du die Quadratwurzel, das giebt 8, und subtrahierst davon die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, nämlich 5, so bleibt 3 als Rest, dieser ist die Wurzel des Quadrates, welches du suchst, und das Quadrat ist 9.“ Hierauf giebt Mohammed den unter 1) folgenden geometrischen Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens.

Da $x + 5 = 8$ ist, so folgt $x = 3$. Legt man dieser geometrischen Betrachtung obige allgemeine Gleichung zugrunde, so hat man:

$$x^2 + px + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2 \qquad \text{oder}$$

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = q + (\tfrac{1}{2}p)^2;$$

folglich: $$x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{q + (\tfrac{1}{2}p)^2}.$$

2) Die anschauliche Auflösung obiger Gleichung und die Richtigkeit des Verfahrens kann auch auf folgende Weise augenscheinlich gezeigt werden. Der Ausdruck:

$$x^2 + 10x = x(x + 10)$$

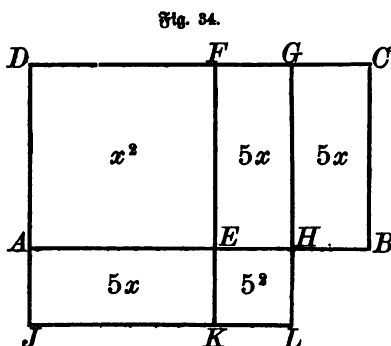
werde durch ein Rechteck dargestellt, dessen Breite AD den Wert der Unbekannten x und dessen Länge AB die Summe $x + 10$ versinnlicht (Fig. 34). Das Quadrat über AD veranschaulicht x^2 und das Rechteck $EBCF$ das Produkt $10x$. Halbiert man dieses Rechteck durch GH, legt $BCGH$ an Seite AE und bildet das Ergänzungsquadrat über $EH = 5$, so ist:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

oder:

$$(x + 5)^2 = 64.$$

Fig. 34.



Mithin versinnlicht die Seite AH des größeren Quadrates den Ausdruck $x + 5$ und auch $\sqrt{64} = 8$. Die Strecke $AD = x$ bezeichnet daher die Zahl $8 - 5 = 3$.

b) Rein algebraische Ableitung der Auflösungsformel für die allgemeine Gleichung $x^2 \pm px = \pm q$.

Vorbereitende Aufgabe: Den zweigliedrigen Ausdruck $x^2 \pm px$ zu einem vollständigen zu ergänzen.

Auflösung: Vergleicht man das entwickelte Quadrat des Binoms $a \pm b$ mit dem Ausdruck $x^2 \pm px$, so bestehen offenbar die Beziehungen:

$$a = x, \quad 2b = p; \quad \text{also} \quad b = \frac{p}{2} \quad \text{und daher} \quad b^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

d. h. das fehlende dritte Glied des unvollständigen quadratischen Ausdrucks $x^2 \pm px$ ist das Quadrat des halben Koeffizienten des zweiten Gliedes. Man nennt $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ die quadratische Ergänzung oder das Ergänzungsquadrat von $x^2 \pm px$.

Auflösung obiger Gleichung. Addieren wir auf beiden Seiten der Gleichung das Quadrat des halben Koeffizienten des zweiten Gliedes, also $\frac{1}{4}p^2$, um das Quadrat zu einem vollständigen zu ergänzen, so haben wir:

$$x^2 \pm px + \tfrac{1}{4}p^2 = \tfrac{1}{4}p^2 \pm q,$$

oder indem wir die linke Seite in Quadratform schreiben:

$$(x \pm \tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}p^2 \pm q.$$

Zieht man aus beiden Seiten die Quadratwurzel, so entsteht:

$$x \pm \tfrac{1}{2}p = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 \pm q};$$

folglich:

$$\text{I)} \quad x = \mp \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 \pm q}.$$

Hieraus ergeben sich für die Unbekannte zwei Wurzelwerte (§ 42, 1) Lehrsatz), nämlich:

$$x_1 = \mp \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 \pm q}, \qquad x_2 = \mp \tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 \pm q}.$$

Formel I) ist der Ausdruck des folgenden allgemeinen Gesetzes:

In jeder Gleichung von der Normalform:

$$x^2 \pm px = \pm q$$

ist die Wurzel der Unbekannten gleich dem halben Koeffizienten des zweiten Gliedes mit entgegengesetztem Vorzeichen, $\pm$ der Quadratwurzel aus der Summe des Quadrates dieses halben Koeffizienten und dem Absolutgliede.

Vorstehende Auflösungsformel findet zur Berechnung der Unbekannten die häufigste Anwendung. Zuerst löse man einige Beispiele ausführlich auf und schreibe dann beim praktischen Rechnen stets den Wert der Unbekannten aus der Normalform sofort hin.

Beispiel:

$$6x^2 - 40 = 56x; \quad x^2 - \frac{28}{3}x = \frac{20}{3};$$

$$x = \frac{14}{3} \pm \sqrt{\frac{20}{3} + \left(\frac{14}{3}\right)^2} = \frac{14 \pm 16}{3}; \quad x_1 = 10, \quad x_2 = -\frac{2}{3}.$$

3) Beziehung zwischen den bekannten Größen der Gleichung und ihren Wurzeln. Ist in der Formel für x der Radikand $\frac{1}{4}p^2 - q = 0$, so sind die beiden Wurzeln x_1 und x_2 einander gleich. Der Ausdruck $\frac{1}{4}p^2 - q$, dessen Verschwinden die Gleichheit zweier Wurzelwerte einer Gleichung bedingt, wird von neueren Algebristen Diskriminante genannt. Hat die Diskriminante den Wert Null, so ist die linke Seite der gegebenen Gleichung das Quadrat eines Binoms. Wenn die Diskriminante einer quadratischen Gleichung größer als Null ist, so sind beide Wurzeln derselben reell verschieden, und zwar rational oder irrational (§ 79, 2), je nachdem der Radikand ein Quadrat (radizierbar) ist oder nicht. Ist dagegen $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$, so kann die Gleichung durch keine Zahl der relativen Zahlenreihe (§ 58) befriedigt werden. Die allgemeine Auflösung der gemischten quadratischen Gleichung macht die Einführung einer neuen Zahlform, der sog. komplexen Zahl, notwendig.

Beispiel:

$$x^2 + 6x - 40 = 0; \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -10.$$

Die Summe der Wurzeln giebt:

$$x_1 + x_2 = 4 + (-10) = -6,$$

der Koeffizient des zweiten Gliedes heißt $+6$. Das Produkt der Wurzeln ist:

$$x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot (-10) = -40,$$

das freie Glied heißt ebenfalls -40.

Lehrsatz: In jeder gemischten quadratischen Gleichung von der Form $x^2 \pm px \pm q = 0$ ist die algebraische Summe der Wurzeln gleich dem Koeffizienten des

zweiten Gliedes mit entgegengesetztem Vorzeichen und das Produkt der Wurzeln dem Absolutgliede gleich.*)

In Zeichen:

$$x_1 + x_2 = \pm p, \qquad x_1 \cdot x_2 = \pm q.$$

1) Beweis. Durch die Auflösung der Gleichung

$$x^2 + px - q = 0$$

erhält man für die Unbekannte die beiden Werte:

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}, \qquad x_2 = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$x_1 + x_2 = -p,$$

ihre Multiplikation liefert:

$$x_1 \cdot x_2 = \tfrac{1}{4}p^2 - (\tfrac{1}{4}p^2 + q) = -q.$$

2) Beweis. Heißen die Wurzeln der vorstehenden Gleichung x_1 und x_2, so ist:

$$\begin{cases} x_1^2 + px_1 + q = 0 \\ x_2^2 + px_2 + q = 0. \end{cases}$$

Durch Auflösung dieses linearen Gleichungssystemes nach den Unbekannten p und q erhält man:

$$1) \quad p = -(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad 2) \quad q = x_1 \cdot x_2.$$

c) Auflösung durch Zerlegung in einfache Gleichungen.

Wie die reine quadratische, so kann auch die linke Seite der gemischten quadratischen Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0$$

durch das Produkt zweier Binome dargestellt werden. Es ist nämlich

$$1) \quad x^2 + px + q = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 - (\tfrac{1}{4}p^2 - q) = 0.$$

In dieser Form erscheint die linke Seite als Differenz zweier Quadrate und die gegebene Gleichung kann daher nach § 16, 7 β durch:

*) Der französische Mathematiker Vieta († 1603) hat diesen Lehrsatz entdeckt.

2) $(x + \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}) \cdot (x + \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}) = 0$

ersetzt werden. Letztere läßt sich in die einfachen Gleichungen

a) $x + \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} = 0$

und b) $x + \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} = 0$

zerlegen. Die Werte dieser linearen Gleichungen sind nach § 88, 2) zugleich die Lösungen der ursprünglichen Gleichung. Bezeichnet man die Werte der Unbekannten in a) und b) mit x_1 und x_2, so muß nach 2):

3) $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

sein. Hieraus geht der innere Grund hervor, weshalb auch die gemischte quadratische Gleichung zwei Wurzeln hat.

Die Auflösung mittels Zerlegung ist eine sehr praktische Methode. Sie führt besonders am schnellsten zum Ziele, wenn 1) beide Seiten der Gleichung einen Faktor gemeinsam haben, in welchem die Unbekannte vorkommt, und 2) die linke Seite der auf Null reduzierten Gleichung einen Faktor von dieser Eigenschaft enthält.

Beispiel zu 1):

$$(x - a)(b - x) = (x - a)(x + c).$$

Zerlegungen:

$$x - a = 0, \quad \text{also} \quad x = a;$$
$$b - x = x + c, \quad \text{mithin} \quad x = \tfrac{1}{2}(b - c).$$

Beispiele zu 2):

$$(x - 5)(x - 8) = 0; \quad (x + 1)(x - 12) = 0;$$
$$x(ax - b + c) = 0.$$

Man setze jeden Faktor gleich Null und bestimme aus den erhaltenen einfachen Gleichungen die Werte für x (§ 88, 2).

Ist eine Wurzel einer quadratischen Gleichung rational (§ 79, 2), so muß die andere auch rational sein. Um eine numerische Gleichung mit rationalen Wurzeln mittels Zerlegung zu lösen, benutze man die Identität:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

und zerlege das freie Glied q nach § 47,.5) in zwei Faktoren, deren Summe gleich dem Zahlenwert des Koeffizienten p ist.

Beispiele:

$$x^2 + 13x + 22 = 0; \qquad (x+11)(x+2) = 0;$$

Wurzeln $-11, \ -2.$

$$x^2 + 5x - 24 = 0; \qquad (x+8)(x-3) = 0;$$

Wurzeln $-8, \ +3.$

$$x^2 - 5x - 24 = 0; \qquad (x-8)(x+3) = 0;$$

Wurzeln $+8, \ -3.$

Zufolge obigen Lehrsatzes findet man die Wurzeln sofort, wenn man das freie Glied q in zwei Faktoren zerlegt, deren Summe $-p$ ist. So erhält man z. B. aus $x^2 - 11x + 24 = 0$ sofort $x_1 = +8$ und $x_2 = +3$. Kennt man eine Wurzel x_1 der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so findet man die andere, wenn man das reine Glied q durch x_1 dividiert oder die bekannte Wurzel von $-p$ subtrahiert. So wird z. B. die Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$ durch $x_1 = 2$ befriedigt, weshalb $x_2 = 8 : 2 = 4$ sein muß.

Ist eine Wurzel w einer gegebenen Gleichung bekannt, so ist $x - w$ ein Faktor der linken Seite und der andere Faktor heißt $x - \frac{q}{w}$. Hat die Gleichung die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

und ist w eine gesuchte Wurzel, so sind $x - w$ und $ax - \frac{c}{w}$ die Faktoren der linken Seite. Bei der Faktoren-Zerlegung achte man darauf, daß in dem Produkt $\left(x - w\right) \cdot \left(ax - \frac{c}{w}\right)$ der Ausdruck $x \cdot ax$ gleich dem ersten Gliede ist und $w \cdot \frac{c}{w}$ mit dem dritten Gliede der Gleichung übereinstimmt. Dann liefert die Gleichung $ax - \frac{c}{w} = 0$ die zweite Wurzel der quadratischen Gleichung. So z. B. wird die Gleichung

$$5x^2 - 12x + 7 = 0$$

durch $x = 1$ befriedigt; folglich muß der eine Faktor der linken Seite $x - 1$ und der andere $5x - 7$ sein. Es ist daher $5x - 7 = 0$ eine besondere Bestimmungsgleichung für die andere

Wurzel. Die Gleichung $6x^2 - 23x + 20 = 0$ kann durch $(3x - 4)(2x - 5)$ ersetzt werden; daher liefern die linearen Gleichungen: $3x - 4 = 0$ und $2x - 5 = 0$ die Wurzeln der gegebenen quadratischen Gleichung.

4) Man kann die Auflösung der quadratischen Gleichung benutzen um einen quadratischen Ausdruck $Ax^2 + Bx + C$ in Faktoren zu zerlegen (§ 47, 5). Da

$$Ax^2 + Bx + C = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right)$$

ist, also der quadratische Ausdruck links immer auf die Form

$$A(x^2 + px + q)$$

gebracht werden kann, so verwandele man den Ausdruck in den Klammern mittels der Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

in ein Produkt und multipliziere dasselbe mit A. Z. B.:

$$3x^2 - 28x - 20 = 3\left(x^2 - \frac{28}{3}x - \frac{20}{3}\right).$$

Die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 - \frac{28}{3}x - \frac{20}{3} = 0 \quad \text{find} \quad x_1 = 10, \quad x_2 = -\frac{2}{3};$$

mithin:

$$3x^2 - 28x - 20 = 3\left(x - 10\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = \left(x - 10\right)\left(3x + 2\right).$$

5) Kennzeichen für die Art der Wurzeln. Die Gleichung 3) unter c) in der Umkehrung, nämlich $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q$ sagt: Wenn man die auf Null gebrachten Wurzelgleichungen miteinander multipliziert, so entsteht eine quadratische Gleichung, in welcher:

$$-(x_1 + x_2) = p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

ist. Um daher z. B. die Gleichung aufzustellen, welche die Wurzeln $+8$ und -10 hat, bilde man die auf Null reduzierten Wurzelgleichungen: $x - 8 = 0$ und $x + 10 = 0$. Alsdann heißt die verlangte Gleichung:

$$(x - 8)(x + 10) = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + 2x = 80.$$

Oder man berechne die Werte für $x_1 + x_2 = p$, $x_1 \cdot x_2 = q$ und schreibe die gesuchte Gleichung sofort hin. Sollen z. B. die Wurzeln $+12$ und -5 heißen, so ist $x_1 + x_2 = 7$ und $x_1 \cdot x_2 = -60$; daher lautet die verlangte Gleichung $x^2 - 7x - 60 = 0$.

Sind a und b reelle Wurzeln einer quadratischen Gleichung, so bestehen hinsichtlich der Vorzeichen folgende vier verschiedene Formen zu bildender Faktoren, bezw. Gleichungen:

1) $(x + a)(x + b) = x^2 + px + q = 0$
2) $(x + a)(x - b) = x^2 + px - q = 0$
3) $(x - a)(x + b) = x^2 - px - q = 0$
4) $(x - a)(x - b) = x^2 - px + q = 0$. (Vergl. § 47, 5.)

Gleichung 1) sagt: Sind p und q positiv, so sind die Wurzeln negativ. Aus 2) und 3) folgt: Ist p positiv oder negativ, q dagegen negativ, so ist eine Wurzel positiv, die andere negativ. Gleichung 4) lehrt: Wenn p negativ, aber q positiv ist, so haben beide Wurzeln positiven Wert.

Die Aufeinanderfolge je zweier Glieder einer Gleichung mit demselben Vorzeichen nennt man eine Folge. Haben zwei Glieder die Zeichen +, — oder —, +, so liegt eine Abwechselung vor. Gleichung 1) hat also 2 Folgen, die Gleichungen 2) und 3) zeigen 1 Folge und 1 Abwechselung und in Gleichung 4) bestehen 2 Abwechselungen. Hieraus fließt ein praktisches Gesetz, durch welches man aus der Folge und dem Wechsel der Vorzeichen der drei Glieder auf die Art der Wurzeln schließen kann.

Lehrsatz: Jede Gleichung mit reellen Wurzeln hat so viele positive Wurzeln als Abwechselungen, und so viele negative Wurzeln, als Folgen vorhanden sind.

Dieses Gesetz, von Descartes (1596—1650) entdeckt, gilt auch für höhere Gleichungen.

§ 106. Symmetrische Form der Wurzelwerte; Auflösung von Wurzelgleichungen.

In einigen Fällen ist es wünschenswert, die Werte der Unbekannten in Form von symmetrischen Ausdrücken darzustellen. Diese Umformungen sind besonders bei Auflösung der Gleichungen:

1) $x^2 - ax + b^2 = 0$, 2) $x^4 - ax^2 + b^2 = 0$*)

gebräuchlich. In den Fällen, in denen ein symmetrisches Resultat gefordert wird, wendet man zur Auflösung sehr zweckmäßig den Lehrsatz von der korrespondierenden Addition und Subtraktion (§ 74) an.

Gegeben:	Gegeben:
$x^2 - ax + b^2 = 0$.	$x^4 - ax^2 + b^2 = 0$.

*) Diese Gleichung ist vom vierten Grade (§ 107).

Lösung:

$$x^2 + b^2 = ax$$

$$\frac{x^2 + b^2}{2bx} = \frac{ax}{2bx} = \frac{a}{2b}$$

$$\frac{x^2 + b^2 + 2bx}{x^2 + b^2 - 2bx} = \frac{a + 2b}{a - 2b}.$$

$$\frac{x + b}{x - b} = \sqrt{\frac{a + 2b}{a - 2b}}$$

$$x = b \cdot \frac{\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}}{\sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b}}.$$

Lösung:

$$x^4 + b^2 = ax^2$$

$$\frac{x^4 + b^2}{2bx^2} = \frac{a}{2b}.$$

$$\frac{x^2 + b}{x^2 - b} = \sqrt{\frac{a + 2b}{a - 2b}}$$

$$\frac{x^2}{b} = \frac{\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}}{\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}}.$$

Die Wurzeln aus dem Nenner fortgeschafft, giebt:

$$\frac{x^2}{b} = \frac{(\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b})^2}{4b}$$

$$x = \pm \tfrac{1}{2}(\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}).$$

Symmetrische Gleichungen. Sind in einer geordneten auf Null zurückgeführten Gleichung die Koeffizienten vorwärts und rückwärts gelesen dieselben, so nennt man die Gleichung symmetrisch. Die allgemeine symmetrische Gleichung zweiten Grades ist:

$$1) \quad ax^2 \pm bx + a = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch a und setzt $\frac{b}{a} = p$, so geht sie in die Form:

$$2) \quad x^2 \pm px + 1 = 0$$

über. Da zufolge des Gesetzes § 105 unter 3) $x_1 \cdot x_2 = 1$ sein muß, so ist in jeder Gleichung vorstehender Form $x_1 = \frac{1}{x_2}$ und $x_2 = \frac{1}{x_1}$. Hieraus folgt, daß die eine Wurzel der symmetrischen Gleichung 2) dem reziproken Werte der andern gleich sein muß, weshalb auch die Bezeichnung reziproke Gleichung gerechtfertigt ist. Diese Gleichungsart hat die Eigentümlichkeit, daß sie unverändert bleibt, wenn man an Stelle von x die Reziproke $\frac{1}{x}$ setzt. Die Gleichung $x + \frac{1}{x} = \frac{a}{b}$ läßt sich auf die Form $x^2 - \frac{a}{b}x + 1 = 0$ bringen und ist daher symmetrisch. Mittels der Auflösungsformel I § 105, b) erhält man:

$$x = \frac{1}{2b}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}\right).$$

Giebt man der gegebenen Gleichung die Form $\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{a}{b}$ und wendet

zur Auflösung die korrespondierende Addition und Subtraktion an, so gewinnt man die Wurzeln in der symmetrischen Form:

$$\frac{\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b}}.$$

Aus den symmetrischen Gleichungen:

$$x + \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4} \quad \text{und} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5}$$

kann man sofort auf die Wurzeln $4, \frac{1}{4}$, bezw. $\frac{5}{2}$ und $\frac{2}{5}$ schließen.

Auflösung von Wurzelgleichungen.

Für die Behandlung von Wurzelgleichungen, deren Auflösung auf eine quadratische Gleichung führt, gelten die in § 90 besprochenen Regeln. Gleichungen von der Form:

$$ax + b + c\sqrt{ax+b} = d$$

lassen sich nach der Methode b) (§ 90) direkt als quadratische lösen. Hat die Gleichung die Form:

$$ax + b + c\sqrt{dx+e} = f,$$

so gestalte man dieselbe so um, daß $ax + b$ dem Radikanden gleich wird, wodurch die Gleichung sich für den Wurzelausdruck in eine quadratische verwandelt. Dies Verfahren hat vor dem § 90, 1) angegebenen mehrere Vorzüge.

1) Beispiel. Gegeben:

$$x - 6\sqrt{x} = 40.$$

Auflösung. Man betrachte $\sqrt{x}$ als Unbekannte und setze $\sqrt{x} = z$, alsdann geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$z^2 - 6z = 40.$$

Hieraus:

$$z = 3 \pm 7; \quad z_1 = 10, \quad z_2 = -4;$$

folglich:

$$x_1 = 10^2 = 100 \quad \text{und} \quad x_2 = (-4)^2.$$

Da der Wurzelexponent gerade ist, so gelten für die Wurzelgröße beide Vorzeichen. Der eine Wert x_1 gilt für das positive, also für die

Gleichung:
$$x - 6 \cdot (+\sqrt{x}) = 40,$$
der andere x_2 für das negative und befriedigt die Gleichung:
$$x - 6 \cdot (-\sqrt{x}) = 40.$$

2) Beispiel. Gegeben:
$$x + 4\sqrt{x+7} = 17 + 2\sqrt{x+7}.$$

Auflösung. Man gebe der Gleichung die Form:
$$x + 7 + 2\sqrt{x+7} = 17 + 7 = 24.$$
$\sqrt{x+7} = -1 \pm 5$; mithin $x_1 = 9$ und $x_2 = (-6)^2 - 7 = 29$.

3) Beispiel. Gegeben:
$$\frac{\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{4x}+5}{10-\sqrt{x}}.$$

Auflösung. Schafft man die Brüche fort und ordnet die Gleichung, so erhält man:
$$3x + 5\sqrt{x} = 100. \quad \sqrt{x} = \frac{-5 \pm 35}{6}.$$

4) Beispiel. Gegeben:
$$4x - 8\sqrt{7x+1} + 28 = 0.$$

Auflösung. Um die Gleichung für den Wurzelausdruck quadratisch zu machen, multipliziere man dieselbe mit $\frac{7}{4}$ und addiere beiderseits 1, so entsteht:
$$7x + 1 - 14\sqrt{7x+1} = -48; \quad \sqrt{7x+1} = 7 \pm 1.$$

5) Beispiel. Gegeben:
$$\sqrt{5x^2 - 16} = 32 - (x^2 + 2)5.$$

Auflösung. Man gebe der Gleichung die Form:
$$5x^2 - 16 + \sqrt{5x^2 - 16} = 6.$$
$$z^2 + z = 6; \quad z = \frac{-1 \pm 5}{2}.$$
$$x = \pm 2, \quad \pm\sqrt{5}. \text{ (Vergleiche § 113.)}$$

6) Beispiel. Gegeben:
$$3x^2 + 6x\sqrt{6x-5} = 329 - (2x^2 + 10\tfrac{1}{2}x).$$

Auflösung. Multipliziert man die Gleichung mit 5 und ordnet, so entsteht:

$$25x^2 + 30x\sqrt{6x-5} + 54x = 1645.$$

Beiderseits 45 subtrahiert, liefert:

$$(5x+3\sqrt{6x-5})^2 = 1600; \quad \text{daher} \quad 5x+3\sqrt{6x-5} = \pm 40.$$

Diese Gleichung mit $\frac{6}{5}$ multipliziert und auf beiden Seiten 5 subtrahiert, giebt:

$$6x - 5 + \tfrac{18}{5}\sqrt{6x-5} = 43.$$

$$\sqrt{6x-5} = \frac{-9 \pm 34}{5} \qquad x_1 = 5.$$

§ 107. Höhere Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen.

Manche Gleichungen höherer Grade lassen sich auf quadratische zurückführen und dann wie diese auflösen. Dahin gehören I) alle höheren Gleichungen, in denen der Exponent der einen Unbekannten oder eines Ausdrucks derselben die Hälfte des höchsten Gradanzeigers dieser Unbekannten, des Ausdrucks ist, also alle dreigliederigen Gleichungen von den Formen:

1) $x^{2n} + ax^n - b = 0$

2) $\sqrt[n]{x} + a\sqrt[2n]{x} - b = 0$

3) $(ax^2 + bx + c)^2 + d(ax^2 + bx + c) + f = 0$ und

4) $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + b = 0.$

1) Betrachtet man in Gleichung 1) x^n als Unbekannte und setzt für dieselbe eine Bestimmungsgröße, etwa z, so wird $(x^n)^2 = z^2$. Führt man die neuen Unbekannten in die gegebene Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in die quadratische:

$$z^2 + az = b.$$

Hieraus folgt:

$$z = \tfrac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}).$$

Da der Voraussetzung gemäß $z = x^n$, so ist:

$$x = \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 4b})}.$$

Beispiel. Gegeben sei die biquadratische Gleichung:

$$x^4 + 6x^2 = 135.$$

Auflösung: Setzt man $x^2 = z$, so wird $x^4 = z^2$ und

$$z^2 + 6z = 135; \quad z_1 = 9, \quad z_2 = -15;$$

folglich:

$$x = \pm 3 \quad \text{und} \quad x = \pm \sqrt{-15} \quad \text{(imaginär)}.$$

2) Sieht man in Gleichung 2) $\sqrt[2n]{x}$ zunächst als Unbekannte an und setzt dieselbe gleich z, so wird:

$$a\sqrt[2n]{x} = az \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{x} = z^2.$$

Durch Einsetzung der neuen Unbekannten in die gegebene Gleichung entsteht:

$$z^2 + az = b.$$

Da nun $z = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 4b})$, so ist:

$$x = \left[\tfrac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 4b})\right]^{2n}.$$

Beispiel. Gegeben:

$$\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} = 12.$$

Auflösung. Setzt man $\sqrt[4]{x} = z$, so wird:

$$4\sqrt[4]{x} = 4z \quad \text{und} \quad \sqrt{x} = z^2.$$

$$z^2 + 4z = 12. \quad z_1 = 2, \quad z_2 = -6;$$

folglich:

$$x_1 = 2^4 = 16 \quad \text{und} \quad x_2 = (-6)^4 = 1296.$$

3) Die Gleichung (3) ist für den Ausdruck in der Klammer vom zweiten Grade. In besondern Fällen kann b oder c gleich Null sein.

Beispiel. Gegeben:

$$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 32 = 0.$$

Auflösung. Man ergänze den Ausdruck $x^4 - 10x^3$ zu einem vollständigen Quadrat, indem man $(10x^3 : 2x^2)^2 = (5x)^2$ hinzufügt.*) Dann gebe man der Gleichung die Form:

*) Die quadratische Ergänzung $25x^2$ wird von $37x^2$ weggenommen.

$$(x^2 - 5x)^2 + 12(x^2 - 5x) + 32 = 0,$$

welche für $x^2 - 5x$ quadratisch ist. Man findet:

$$x^2 - 5x = -6 \pm 2.$$

a) $x^2 - 5x = -4$ b) $x^2 - 5x = -8$

$x_1 = 4, \quad x_2 = 1.$ $x_3 = 3, \quad x_4 = 2.$

4) Beispiel 1). Gegeben:

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = 120.$$

Auflösung. Es ist:

$x(x+3) = x^2 + 3x$ und $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$.

Setzt man $x^2 + 3x = z$, so geht die Gleichung in folgende über: $z(z+2) = 120$; also $z = -1 \pm 11$.

a) $x^2 + 3x = 10$ b) $x^2 - 3x = -12$

$x_1 = 2, \quad x_2 = -5.$ $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-39})$.

(komplex, § 119.)

Beispiel 2):

$$(x-5)(x-6)(x-7)(x-8) = 360.$$

Auflösung: Das Produkt $(x-5)(x-8)$ giebt $x^2 - 13x + 40$ und $(x-6)(x-7)$ liefert $x^2 - 13x + 42$. Betrachtet man den Ausdruck $x^2 - 13x + 40$ als Unbekannte y, so hat man:

$$y(y+2) = 360; \text{ folglich } y = -1 \pm 19 \text{ u. s. w.}$$

II) Symmetrische Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades von den Formen:

1) $ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0$

2) $ax^4 + bx^3 \pm cx^2 \pm dx \pm a = 0$

3) $ax^5 \pm bx^4 + cx^3 \pm cx^2 \pm bx \pm a = 0,$

lassen sich ebenfalls mittels der Kenntnis quadratischer Gleichungen lösen.

Auflösung von Gleichung 1). Sind alle Glieder positiv, so ist die linke Seite durch $x + 1$ teilbar. Dieser Faktor gleich Null gesetzt, liefert die Wurzel $x_1 = -1$. Nach ausgeführter Division ist noch die reziproke quadratische Gleichung:

$$ax^2 - (a - b)x + a = 0$$

zu lösen. Haben die beiden letzten Glieder das negative Vorzeichen, so ist die linke Seite durch $x - 1$ teilbar. Dividiert man Gleichung 1) durch a, so erhält dieselbe die Form:

$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0.$$

Letztere Gleichung kann durch:

$$(x + 1)\,[x^2 + (a - 1)x + 1] = 0$$

dargestellt werden.

Behandlung der Gleichung 2). Dividiert man die linke Seite durch x^2 und vereinigt die Glieder mit demselben Koeffizienten, so entsteht:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Diese Gleichung ist inbezug auf den Ausdruck $x + \frac{1}{x}$ quadratisch. Setzt man $x + \frac{1}{x} = y$, also $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, so hat man:

$$ay^2 + by + c - 2a = 0.$$

Heißen die Wurzeln dieser Gleichung y_1 und y_2, so erhält man für x aus den reziproken quadratischen Gleichungen (§ 106):

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \quad \text{und} \quad x + \frac{1}{x} = y_2$$

je 2 Wurzeln, die reziprok sind.

Auflösung der Gleichung 3). Je nachdem das erste und das letzte Glied der linken Seite gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, teile man dieselbe durch $x + 1$ oder $x - 1$. Alsdann ist noch eine symmetrische Gleichung vierten Grades zu lösen.

Geschichtliches über die quadratischen Gleichungen. Die ersten Spuren von der Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichung hat man in Euklids „Elementen" (II. Buch, 11) Satz und VI. Buch, Satz 28) und 29) erkannt. Euklids Auflösungen dieser Aufgaben in vollständig geometrischem Gewande führen algebraisch aufgefaßt auf die Lösung einer quadratischen Gleichung. Heron von Alexandria, dessen schriftstellerische Thätigkeit etwa in die Zeit 100 v. Chr. fällt, löst die gemischte quadratische Gleichung bereits auf rein algebraischem Wege. Vor Auflösung der Gleichungen von der Form $ax^2 + bx = c$ vollzieht er solche Multiplikationen, daß die Werte für a, b und c ganzzahlig werden. Sein Verfahren durch diese Buchstabengleichung ausgedrückt, ist folgendes:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2; \quad x = \frac{1}{a}\left(\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right).$$

Auch Diophantus war die Auflösung der quadratischen Gleichungen bekannt. Der indische Gelehrte Aryabhatta (geb. 476 n. Chr.) löst bestimmte Beispiele obiger Form, indem er die Gleichung stets mit dem Koeffizienten des Quadrates der Unbekannten multipliziert und dann beiderseits das Quadrat des halben Koeffizienten des zweiten Gliedes addiert. Das giebt:

$$(ax)^2 + b \cdot (ax) = ac; \quad ax = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{ac + (\tfrac{1}{2}b)^2}.$$

Negative Wurzeln hielt dieser Algebraiker nicht für zulässig, er sagt: „Absolute negative Zahlen werden von den Leuten nicht gebilligt." Brahmagupta (598—650 n. Chr.) benutzt dieselbe Auflösungsmethode, auch kommen bei ihm negative Wurzeln vor. Crîdhara giebt folgende Regel zur Auflösung: Multipliziere die Gleichung mit dem vierfachen Koeffizienten des Quadrates und addiere auf beiden Seiten dieser Gleichung das Quadrat des Koeffizienten des mittleren Gliedes. Dies Verfahren liefert für die allgemeine Gleichung folgende Auflösung:

$$ax^2 + bx = c; \quad 4a^2x^2 + 4abx = 4ac; \quad (2ax)^2 + 2b(2ax) = 4ac;$$

$$(2ax + b)^2 = 4ac + b^2; \quad x = \frac{1}{2a}\left(\sqrt{4ac + b^2} - b\right).$$

Der berühmte arabische Mathematiker Mohammed ben Musa (Alchwarizmî) unterscheidet in seiner Algebra drei Arten von Gleichungen, welche durch Buchstaben ausgedrückt lauten:

$$1) \quad x^2 + px = q, \qquad 2) \quad x^2 + q = px, \qquad 3) \quad x^2 = px + q.$$

Für jeden dieser drei Fälle giebt er die Auflösung eines Beispiels in bestimmten Zahlen und schließt daran einen geometrischen Beweis für die Richtigkeit derselben.*) Bei jeder Gleichungsform berücksichtigt Mohammed nur die positiven Werte. Für die Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ berechnet er zwei Wurzeln $x_1 = 7$, $x_2 = 3$, weil beide positiv sind. Allgemein giebt er für die 2) Gleichung zwei Wurzelwerte, nämlich:

$$x = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right),$$

wenn $p^2 > 4q$ ist. Er sagt, daß man in jedem bestimmten Falle untersuchen müsse, welcher positive Zahlenwert den Bedingungen der Wortaufgabe entspreche, bei $p^2 < 4q$ sei die Aufgabe unmöglich, bei $p^2 = 4q$ läßt er nur 1 Wert zu. Den vierten Fall, den die allgemeine Gleichung darbieten kann (§ 105, 5), erwähnt Mohammed nicht, weil beide Wurzeln der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ negativ sind. Dem Inder Bhaskara ist die Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel bekannt, er verwendet aber die negativen Wurzeln nur in dem Falle, wenn beide Gleichungswerte positiv werden und bei Anwendung auf die Aufgabe keine negative Zahl auch nur

*) Man sehe § 105 a) und die Fußnote.

vorübergehend zum Vorschein kommt. Beispiel: „Das Quadrat des um 3 verminderten 5. Teiles einer Herde Affen war in einer Grotte verborgen, 1 Affe war sichtbar, der auf einen Baum geklettert war. Wie viele Affen waren es im ganzen?" Bhaskara giebt hier die Antworten 50 und 5 an, bemerkt aber, daß die letztere nicht statthaft sei, weil, wie ein Kommentator erläutert, der 5. Teil von 5, d. i. 1 um 3 vermindert die negative Zahl —2 liefere. Lukas de Borgo (1496) schließt sich vollständig Mohammed an, er betrachtet ebenfalls die oben angegebenen drei Fälle, für welche er besondere Regeln zur Auflösung in lateinischen Versen giebt und das Verfahren durch geometrische Beziehungen begründet. Erst Cardano (1545) läßt die Beschränkung der Wurzeln fallen. Die negativen Wurzeln wurden früher falsche (radices falsae) genannt. Diese Benennung war lange gebräuchlich, auch Descartes bediente sich derselben noch, obgleich er die negativen Wurzeln im geometrischen Sinne richtig auffaßte. Alkarchî, der etwa um 1010—1015 n. Chr. zu Bagdad schriftstellerisch thätig war, hat zuerst die Auflösung der dreigliederigen Gleichung $ax^{2n} + bx^n = c$ durch Zurückführung auf eine quadratische angegeben. Er zeigte auch die Auflösung der Gleichung Mohammeds $x^2 + 10x = 39$ mittels neuer geometrischer Betrachtungen.

§ 108. Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten.

a) Begriffe. Die allgemeine Form einer Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten ist:

$$\text{I)} \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

In dieser Gleichung nennt man die Glieder, welche die zweite Potenz oder das Produkt der Unbekannten*) enthalten, also die Glieder ax^2, bxy, cy^2, quadratische oder Glieder zweiter Dimension. So lange nur ein Koeffizient dieser Glieder von Null verschieden ist, bleibt Gleichung I) quadratisch. Die mit der ersten Potenz der Unbekannten behafteten Glieder dx und ey heißen lineare oder Glieder erster Dimension, während f das Absolutglied der Gleichung genannt wird. Sind sämtliche Glieder einer Gleichung von derselben Dimension, so nennt man sie homogen. Kommen in einer Gleichung nur quadratische Glieder vor, so sagt man, dieselbe sei von „kanonischer" Form.

---

*) Die Summe der Exponenten in dem Produkt xy beträgt 2 (§ 49, Folgerung 2); daher ist dieser Ausdruck quadratisch.

Dividiert man obige Gleichung durch a, so entsteht eine Gleichung folgender Form:

$$\text{II)}\quad x^2 + axy + by^2 + cx + dy + e = 0.$$

Setzt man zur Gleichung I) eine zweite von derselben Form, so hat man das System:

$$\text{III)}\quad \begin{cases} 1)\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ 2)\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0. \end{cases}$$

Schafft man aus diesen Gleichungen eine Unbekannte, z. B. y^2 fort, indem man die erste mit c_1, die zweite mit c multipliziert und die neuen Gleichungen voneinander subtrahiert, so entsteht eine Gleichung, aus welcher man y durch die andere Unbekannte ausdrücken kann. Diese Gleichung hat die Form:

$$3)\quad y = \frac{lx^2 + mx + n}{px + q}.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes für y in 1) oder 2) erhält man eine Eliminationsgleichung von der Form:

$$4)\quad A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A = 0,$$

d. i. allgemein eine Gleichung vierten Grades, welche mittels der Theorie quadratischer Gleichungen nicht lösbar ist. Ein Gleichungssystem gehört aber nur dann zu den quadratischen Gleichungen, wenn die Auflösung desselben durch eine Gleichung zweiten Grades oder mit Hilfe einer der in § 107, II) besprochenen Gleichungsarten erzielt wird. Soll die Auflösung der Gleichung 4) in besondern Fällen gelingen, so muß eine der Bedingungsgleichungen 1) bis 5) zwischen den Koeffizienten erfüllt sein, wodurch 4) in eine der nebenstehenden Formen übergeht.

1) $A_4 = A_3 = 0$, Form: $A_2x^2 + A_1x + A = 0$.

2) $A_3 = A_1 = 0$, " $A_4x^4 + A_2x^2 + A = 0$.

3) $A_4 = A = 0$, " $A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x^2 = 0$.

4) $A_1 = A = 0$, " $A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 = 0$.

5) $A = A_4,\ A_1 = A_3$, " $A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0$ (reziprok).

b) Auflösung eines Systems mit zwei Unbekannten. Zur Elimination einer Unbekannten aus einem gegebenen Gleichungssystem können die in § 99 besprochenen Methoden benutzt werden. Allein in manchen Fällen wird man durch die allgemeinen Auflösungsverfahren auf eine Eliminationsgleichung höheren Grades gelangen. Durch eine geschickte Behandlung und zweckmäßige Verbindung der Gleichungen können oft Weitläufigkeiten und Schwierigkeiten in der Rechnung erspart bleiben. Derartige besondere Auflösungsverfahren hängen von der Beschaffenheit des Systems ab.

I) Häufig ist es vorteilhaft, nicht unmittelbar die Unbekannten selbst, sondern den Wert einer Verbindung derselben, z. B. ihrer Summe, Differenz, des Produktes, des Quotienten u. s. w., zu bestimmen. Hieraus sind dann die Werte der Unbekannten leicht zu ermitteln, z. B.:

1) Gegeben:

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y+5)^2 = 389 \\ x + y = 27. \end{cases}$$

Setzt man $x - 5 = z$ und $y + 5 = u$, so hat man das System zu lösen:

$$\begin{cases} z^2 + u^2 = 389 \\ z + u = 27. \end{cases}$$

2) Gegeben:

$$\begin{cases} (x^2 + 2y^2)(3x^2 - 4y^2) = 48 \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

Man setze $x^2 + 2y^2 = z$ und $3x^2 - 4y^2 = w$, so wird $2(2x^2 - y^2) = z + w$, daher heißt das zunächst aufzulösende System

$$\begin{cases} zw = 48 \\ z + w = 14. \end{cases}$$

II) Besteht das System aus einer linearen und einer quadratischen Gleichung, so wendet man im allgemeinen zweckmäßig die Substitutionsmethode an, z. B.:

Gegeben:

$$\begin{cases} 1) & ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ 2) & a_1x + b_1y + f_1 = 0. \end{cases}$$

Löst man die lineare Gleichung nach einer Unbekannten, z. B. x auf, so ist:

$$3) \quad x = -\frac{b_1y + f_1}{a_1}$$

und führt man diesen Wert in 1) ein, so entsteht eine quadratische Gleichung in y. Bezeichnet man die Werte für die Unbekannte in dieser Gleichung mit y_1 und y_2 und setzt dieselben in 3) ein, so erhält man offenbar zwei Werte für x, welche x_1 und x_2 heißen mögen. Die Wurzeln x_1 und y_1, sowie x_2 und y_2 sind zusammengehörige Werte (§ 98). Hieraus ergiebt sich der

1) **Lehrsatz:** Ein Gleichungssystem aus einer linearen und einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten wird durch zwei Wurzelpaare befriedigt.

III) Die Auflösung ist leicht, wenn sich aus dem System durch die Additions- und Subtraktionsmethode eine einfache oder eine quadratische Gleichung für eine Unbekannte ableiten läßt, z. B.:

$$\text{Gegeben:} \quad \begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 90 \\ 2x^2 - y^2 = 63. \end{cases}$$

Auflösung.

$$x^2 = 36, \quad x = \pm 6; \qquad y^2 = 9, \quad y = \pm 3.$$

Die Vorzeichen der gefundenen Werte für die Unbekannten sind unabhängig voneinander, da in den Gleichungen nur die Quadrate der Unbekannten vorkommen. Daher wird das System durch vier Paar Wurzeln befriedigt, nämlich:

$$\begin{cases} x = 25, & -25, & 25, & -25 \\ y = 24, & 24, & -25, & -24. \end{cases}$$

2) **Lehrsatz:** Besteht ein System aus zwei quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten, so genügen demselben vier Wertepaare.

IV) Bleibt die Richtigkeit einer Gleichung unverändert, wenn man die Werte der Unbekannten miteinander vertauscht, so nennt

man die Gleichung symmetrisch. Es sei das symmetrische System aufzulösen:

$$\begin{cases} 1) & x + y = a \\ 2) & xy = b. \end{cases}$$

Man suche zunächst die Differenz der Unbekannten. Erhebt man die erste Gleichung ins Quadrat und subtrahiert von der neuen Gleichung das Vierfache der zweiten, so entsteht (§ 16, 5β):

$$3) \quad x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b; \quad \text{mithin}$$

$$4) \quad x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Aus 1) und 4) folgt sofort:

$$x = \tfrac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$$

und aus 1): $\quad y = \tfrac{1}{2}(a \mp \sqrt{a^2 - 4b}).$

Das System hat nach Lehrsatz 1) zwei Wertepaare, nämlich:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}), \quad y_1 = a - \sqrt{a^2 - 4b};$$

$$x_2 = a - \sqrt{a^2 - 4b}, \quad y_2 = \tfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}).$$

Bei Auflösung eines Systems symmetrischer Gleichungen braucht man nur die Wurzeln einer Unbekannten zu bestimmen, da das Rechnungsverfahren vollständig dasselbe sein würde, wenn man x mit y vertauschte und dann y berechnete. Sind die Wurzeln einer symmetrischen Gleichung $x_1 = w$, $x_2 = w_1$, so lauten die Werte für die andere Unbekannte im allgemeinen umgekehrt, nämlich $y_1 = w_1$ und $y_2 = w$. In besonderen Fällen können die Werte für x und y einander gleich sein, d. h. es ist $x = y$. So findet man z. B. aus dem System:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (x + y) = 40 \\ xy = 25 \end{cases}$$

$x_1 = +5$, $y_1 = +5$; $x_2 = -5$ und $y_2 = -5$, die beiden übrigen Wertepaare sind komplexe Zahlen (§ 119).

Einige Gleichungen haben die Eigenschaft, daß sie richtig bleiben, wenn man die Unbekannten und zugleich auch ihre Koeffizienten miteinander vertauscht, z. B.:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ ax^2 + by^2 = n. \end{cases}$$

Entwickelt man nach der Additions- und Subtraktionsmethode die Werte der Unbekannten, so findet man:

$$x = \pm\sqrt{\frac{n - bm}{a - b}} \quad \text{und} \quad y = \pm\sqrt{\frac{n - am}{b - a}}.$$

Kürzer findet man hier die Wurzeln für y aus den Werten für x, wenn man a mit b vertauscht. Das gegebene Gleichungssystem heißt symmetrisch inbezug auf die Zahlen a und b.

§ 109. Auflösung einiger häufig vorkommenden Gleichungssysteme.

Wir gehen zur Behandlung einer Gruppe von Aufgaben über, welche in der Algebra häufig Anwendung finden. In vielen Fällen kann die Auflösung schwieriger Gleichungssysteme durch Zurückführung auf diese Grundaufgaben bewerkstelligt werden. Daher nennen wir diese unten folgenden Gleichungssysteme die Grundformen der quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Behandlung dieser Gleichungen, bezw. der durch sie dargestellten Wortaufgaben ist eine mannigfaltige. Man kann diese Beispiele lösen: 1) auf verschiedenem algebraischem Wege; 2) mittels Versinnlichung*), bei welcher die in § 16 behandelten Rechtecksätze gute Dienste leisten und 3) rein arithmetisch, mit Hilfe der in § 16 enthaltenen arithmetischen Lehrsätze. Der Anfänger möge sich die Auflösung dieser Grundformen zum sicheren geistigen Eigentum machen.

a) Grundformen:

1) $\begin{cases} 1) & x^2 + y^2 = a \\ 2) & xy = b. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1) & x \pm y = a \\ 2) & x^2 + y^2 = b. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1) & x + y = a \\ 2) & xy = b. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 1) & x + y = xy \\ 2) & x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 1) & xy = a \\ 2) & \frac{x}{y} = b. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 1) & x^2 \pm y^2 = a \\ 2) & \frac{x}{y} = \frac{m}{n}. \end{cases}$

*) Man sehe § 112.

$$7)\ \begin{cases} 1)\ x + y = a \\ 2)\ x^2 + y^2 + xy = b. \end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases} 1)\ x^2 + y^2 \pm (x + y) = a \\ 2)\ xy = b. \end{cases}$$

Algebraische Auflösungen dieser Aufgaben.

1) Man berechne zunächst die Summe und die Differenz der Unbekannten. Multipliziert man die zweite Gleichung mit 2 und verbindet die erhaltene Gleichung durch Addition und durch Subtraktion mit der ersten, so hat man:

$$(x + y)^2 = a + 2b \quad \text{und} \quad (x - y)^2 = a - 2b.$$

Hieraus $x + y = \pm\sqrt{a + 2b}$ und $x - y = \pm\sqrt{a - 2b}$; folglich $x = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b})$.

2) Da uns hier die Summe der Unbekannten gegeben ist, so suchen wir zunächst ihr Produkt und hieraus ihre Differenz. Erhebt man 1) ins Quadrat und subtrahiert von der erhaltenen Gleichung die zweite, so hat man 3) $2xy = a^2 - b$. Gleichung 3) von 2) subtrahiert und die neue radiziert, liefert:

$$4)\quad x - y = \pm\sqrt{2b - a^2}.$$

In ähnlicher Weise findet man den Wert für $x + y$, wenn $x - y$ gegeben ist.

3) Dieses System ist unter 4) § 108 behandelt. 2) Lösung. Es sei in Gleichung 1) $a = 2s$, also $x + y = 2s$. Setzt man nun $x - y = 2d$, so ist $x = s + d$ und $y = s - d$. Diese Werte für x und y in 2) eingesetzt, giebt $(s + d)(s - d) = b$, hieraus $d = \pm\sqrt{s^2 - b}$ u. s. w.

4) Setzt man in die quadrierte erste Gleichung für $x^2 + y^2$ den Wert a, so entsteht die quadratische Gleichung für xy:

$$(xy)^2 - 2xy = a; \quad \text{folglich} \quad xy = 1 \pm\sqrt{a + 1}.$$

5) Die Multiplikation beider Gleichungen liefert:

$$x^2 = ab, \quad x = \pm\sqrt{ab}.$$

Gleichung 1) durch 2) dividiert, giebt:

$$y^2 = \frac{a}{b}, \quad \text{folglich} \quad y = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

6) Da die Quotientgleichung $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ gegeben ist, so setze man $x = mt$ und $y = nt$ (§ 74, 6, Anmerkung). Führt man diese Werte in die erste Gleichung ein, so entsteht:

$$(m^2 \pm n^2)t^2 = a; \quad t = \sqrt{\frac{a}{m^2 \pm n^2}} \quad \text{u. s. w.}$$

7) Erhebt man 1) ins Quadrat und subtrahiert von der erhaltenen Gleichung die zweite, so hat man $xy = a^2 - b$. Aus dieser Gleichung und 2) findet man leicht:

$$x - y = \pm\sqrt{4b - 3a^2}.$$

8) Addiert man das Doppelte der zweiten Gleichung zur ersten, so entsteht die quadratische Gleichung in $x + y$:

$$(x + y)^2 \pm (x + y) = a + 2b; \quad \text{mithin}$$

$$x + y = \tfrac{1}{2}(\mp 1 \pm \sqrt{a + 2b + \tfrac{1}{4}}).$$

b) Zurückführung gegebener Gleichungssysteme auf eine der Grundformen.

Wir zeigen nun an einigen Beispielen, welche in den Anwendungen der Algebra oft vorkommen, wie ihre Auflösung durch Zurückführung auf eine der bekannten Gleichungssysteme 1) bis 8) bewerkstelligt werden kann.

I) Beispiel.

$$\begin{cases} 1) \quad x + y = a \quad (11) \\ 2) \quad x^3 + y^3 = b \quad (341). \end{cases}$$

1) Auflösung. Dividiert man 2) durch 1), so entsteht (Seite 66, Formel 2):

$$3) \quad x^2 - xy + y^2 = 31.$$

Diese Gleichung von der quadrierten ersten subtrahiert, giebt:

$$3xy = 90, \qquad \text{folglich} \qquad 4) \quad xy = 30.$$

Gleichung 1) und 4) bilden die Grundform 3).

2) Auflösung. Erhebt man Gleichung 1) auf den Kubus und subtrahiert von der erhaltenen Gleichung die zweite, so hat man:

$$3) \quad 3xy(x + y) = 990.$$

Setzt man in diese Gleichung den Wert für $x + y$ aus 1), so wird:

$$4)\quad xy = 30\,.$$

II) Beispiel.

$$\begin{cases} 1) & x + y = a \quad (5) \\ 2) & x^4 + y^4 = b \quad (97). \end{cases}$$

1) Auflösung. Erhebt man 1) in die vierte Potenz und subtrahiert von der neuen Gleichung die zweite, so bleibt:

$$3)\quad 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = 528 \qquad \text{oder}$$

$$4)\quad 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 = 528\,.$$

Aus der quadrierten ersten Gleichung folgt:

$$x^2 + y^2 = 25 - 2xy\,.$$

Diesen Wert für $x^2 + y^2$ in 4) eingesetzt, giebt:

$$5)\quad 2 \cdot (xy)^2 - 100xy + 528 = 0\,;$$

folglich:

$$6)\quad xy = 25 \pm 19\,; \qquad xy = 6\,.$$

2) Auflösung. Man gehe aus von der identischen Gleichung:

$$(x + y)^4 = (x^4 + y^4) + 4xy(x + y)^2 - 2x^2y^2$$

Nun ist aber:

$$(x + y)^4 = a^4\,; \quad x^4 + y^4 = b \quad \text{und} \quad x + y = a\,.$$

Man hat daher:

$$a^4 = b + 4a^2 \cdot xy - 2(xy)^2\,; \qquad \text{folglich}$$

$$(xy)^2 - 2a^2 \cdot (xy) + \tfrac{1}{2}(a^4 - b) = 0$$

$$xy = a^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^4 + b)}\,.$$

III) Beispiel.

$$\begin{cases} 1) & x + y = a \quad (12) \\ 2) & xy(x^2 + y^2) = b \quad (2560). \end{cases}$$

Auflösung. Erhebt man 1) ins Quadrat, so ergiebt sich:

$$3)\quad x^2 + y^2 = a^2 - 2xy\,.$$

Den Wert $a^2 - 2xy$ in 2) eingesetzt, liefert:

$$4)\quad xy(a^2 - 2xy) = b \qquad \text{oder}$$

$$5)\quad (xy)^2 - \tfrac{1}{2}a^2(xy) + \tfrac{1}{2}b = 0;$$

folglich:

$$xy = \tfrac{1}{4}\left(a^2 \pm \sqrt{a^4 - 8b}\right).$$

IV) Beispiel.

$$(x^2 + y^2)(x + y) = a \quad (715)$$
$$(x^2 - y^2)(x - y) = b \quad (99).$$

1) Auflösung. Das gegebene System kann man in folgender Weise darstellen:

$$[(x + y)^2 - 2xy](x + y) = a$$
$$[(x + y)^2 - 4xy](x + y) = b.$$

Setzt man zur Kürze $x + y = s$, $xy = p$, so gehen diese Gleichungen in die folgenden über:

$$(s^2 - 2p)s = a$$
$$(s^2 - 4p)s = b.$$

Hieraus findet man leicht:

$$s = x + y = \sqrt[3]{2a - b}\,(11).$$

2) Auflösung. Man dividiere 1) durch 2), so erhält man:

$$\frac{(x^2 + y^2)(x + y)}{(x - y)^2(x + y)} = \frac{715}{99} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 2xy} = \frac{65}{9}.$$

Aus der letzten Gleichung kann man auf verschiedenem Wege (z. B. mittels der korrespondierenden Addition und Subtraktion) die Gleichung ableiten:

$$\left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2 = \frac{121}{9}; \quad \frac{x + y}{x - y} = \frac{11}{3}.$$

V) In manchen Fällen hat eine Gleichung des gegebenen Systems eine der folgenden unter a) bis f) verzeichneten Formen, oder man kann eine derselben aus den vorgelegten Gleichungen entwickeln.

a) $\frac{x + y}{x + y} = \frac{m}{n}$; b) $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{m}{n}$;

c) $\frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{m}{n}$; d) $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{m}{n}$;

e) $\frac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3} = \frac{m}{n}$; f) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{m}{n}$.

Dann leite man mit Hilfe des 3) Lehrsatzes § 74 den Wert des Quotienten $\frac{x}{y}$ unmittelbar ab. Man hat aus:

$$\text{a)}\quad \frac{x}{y} = \frac{m+n}{m-n}, \qquad \text{b)}\quad \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{m+n}{m-n}},$$

$$\text{c)}\quad \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{m+n}{m-n}},$$

hieraus nach a):

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}},$$

$$\text{d)}\quad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{m+2n}+\sqrt{m-2n}}{\sqrt{m+2n}-\sqrt{m-2n}}, \qquad \text{e)}\quad \frac{x}{y} = \sqrt[3]{\frac{m+n}{m-n}},$$

$$\text{f)}\quad \frac{x}{y} = \left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2.$$

Zur Entwickelung des Quotienten der Unbekannten ist es oft zweckmäßig, zwei Gleichungen durcheinander zu dividieren. So hat man z. B. aus:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^2y - xy^2 = -6 \end{cases}$$

$$\frac{x^2y + xy^2}{x^2y - xy^2} = \frac{30}{-6}; \qquad \text{hieraus}$$

$$\frac{x^2y}{xy^2} = \frac{30-6}{30-(-6)} = \frac{2}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{y} = \frac{2}{3}.$$

c) Behandlung von Wurzelgleichungen.

VI) Beispiel.

$$\begin{cases} 1)\quad x + y = 58 \\ 2)\quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10. \end{cases}$$

1) Auflösung. Um die Wurzelgrößen zu beseitigen, setze man $\sqrt{x} = z$ und $\sqrt{y} = w$, so hat man ein System von der Form 2) aufzulösen. Oder man betrachte $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ als Unbekannten und löse das System direkt wie Grundform 2) auf.

2) Auflösung. Erhebt man 2) ins Quadrat und löst diese Gleichung nach xy auf, so findet man:

$$xy = \left(\frac{100 - x - y}{2}\right)^2.$$

Durch Einsetzung des Wertes für x aus 1) ergiebt sich:

$$xy = 441.$$

3) Auflösung. Aus 2) folgt:

$$3)\quad \sqrt{x} = 10 - \sqrt{y}.$$

Diese Gleichung ins Quadrat erhoben und in die neue Gleichung den Wert für x aus 1) eingesetzt, liefert:

$$4)\quad y - 10\sqrt{y} + 21 = 0;\qquad \sqrt{y} = 5 \pm 2.$$

VII) Beispiel.

$$\begin{cases} 1)\quad x^3 + y^3 = a\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} & (a = 63) \\ 2)\quad x^3 - y^3 = b\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} & (b = 183) \end{cases}$$

Auflösung. Dividiert man 2) durch 1), so hat man:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x-y}{x+y}} \qquad \text{oder}$$

$$3)\quad \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x-y}{x+y}.$$

Die linke Seite von 3) (nach den Formeln 2) und 3) Seite 66) zerlegt und diese Gleichung durch $\frac{x-y}{x+y}$ dividiert, giebt:

$$4)\quad \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{b}{a} = \frac{183}{63} = \frac{61}{21}.$$

Hieraus folgt zufolge § 75, 3) Lehrsatz:

$$6)\quad \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{a+b}{b-a} = \frac{41}{20},$$

mithin nach 5) d) $\quad \dfrac{x+y}{x-y} = 9.$

Aus 6) kann man den Wert des Quotienten $\frac{x}{y}$ auch auf folgende Weise entwickeln. Führt man die Division links aus, so entsteht:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{41}{20}.$$

Diese Gleichung mit $\frac{x}{y}$ multipliziert, liefert eine quadratische für $\frac{x}{y}$, nämlich:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{41}{20}\cdot\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0; \quad \frac{x}{y} = \frac{41 \pm 9}{40}, \quad \frac{x}{y} = \frac{5}{4}.$$

§ 110. Fortsetzung der Auflösungslehre.

1) Wenn in dem allgemeinen vollständigen Gleichungssystem III) § 108 die Koeffizienten der linearen Glieder und die Bekannten f und f_1 zugleich Null werden, so entstehen Gleichungen von „kanonischer Form", nämlich:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0. \end{cases}$$

Jede Gleichung dieser Art ist für den Quotienten $\frac{x}{y}$ vom zweiten Grade. Dividiert man z. B. die erste Gleichung durch y^2, so ist:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c = 0.$$

Ist aus dieser Gleichung der Wert für $\frac{x}{y}$ berechnet, so findet man nach § 109, 6) die Wurzeln der Unbekannten ohne Schwierigkeit. Fehlen in dem allgemeinen Gleichungssystem III) nur die linearen Glieder, so lautet dasselbe:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = f \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = f_1. \end{cases}$$

Man leite aus den gegebenen Gleichungen eine dritte von kanonischer Form ab, indem man die erste Gleichung mit f_1, die zweite mit $-f$ multipliziert und die erhaltenen Gleichungen addiert. Z. B.:

$$\begin{cases} 1) \quad 2x^2 + 2xy + 3y^2 = 18 \\ 2) \quad 6x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

Auflösung. Multipliziert man, um die Absolutglieder fortzuschaffen, 1) mit -2, die zweite Gleichung mit 3 und addiert die entstandenen Gleichungen, so ist:

$$14x^2 - xy - 3y^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{1}{14} \cdot \frac{x}{y} = \frac{3}{14}; \qquad \frac{x}{y} = \frac{1 \pm 13}{28}.$$

2) Die Auflösung eines Gleichungssystems von der Form III) (§ 108) führt im allgemeinen auf eine Eliminationsgleichung vierten Grades. Soll die Entwickelung der Unbekannten mit Hilfe einer quadratischen Endgleichung gelingen, so müssen die den zweiten Grad kennzeichnenden Glieder entweder übereinstimmen oder doch gleich gemacht werden können. Erfüllt das System diese Anforderungen, so kann man aus demselben eine einfache Gleichung herleiten und dann nach § 108, b), 2) die Unbekannten berechnen.

Auflösung durch Zerlegung. Wenn man auf der linken Seite der Gleichung:

$$\text{a)} \quad (ax + by + c)(dx + ey + f) = 0$$

die Multiplikation ausführt, so entsteht eine Gleichung von der allgemeinen Form unter I) § 108.

Vorstehende Gleichung aber kann in die einfachen

$$ax + by + c = 0 \quad \text{und} \quad dx + ey + f = 0$$

zerlegt werden, deren Lösungen die quadratische Gleichung befriedigen. Hat daher eine Gleichung des Systems die Form der allgemeinen Gleichung I) und die andere die Form a), so kann dasselbe in zwei Systeme zerlegt werden, indem man jede lineare Gleichung mit der quadratischen verbindet.

$$1) \quad 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 8x + 4y + 20 = 0$$

$$2) \quad (2x - 3y - 6)(x - 4y + 2) = 0.$$

Zerlegung:

$2x - 3y - 6 = 0$ und Gleichung 1) (Erstes System.)

$x - 4y + 2 = 0$ und Gleichung 1). (Zweites System.)

Die Auflösung jedes Systems liefert zwei Paar zusammengehörige Werte, und diese vier Wertepaare sind die Wurzeln des Systems. Gelingt es also, die linke Seite einer Gleichung

von der allgemeinen Form unter I) in ein Produkt von der Form unter a) zu zerlegen, so ist das System lösbar. Haben beide gegebenen Gleichungen diese Form a), oder lassen sich ihre linken Seiten durch Produkte dieser Art darstellen, so kann man das quadratische System in vier Systeme aus linearen Gleichungen zerlegen, deren Lösungen die Wurzeln der ursprünglichen Gleichungen sind.

In manchen Fällen läßt sich die linke Seite einer numerischen Gleichung von der Form II) § 108 durch ein Produkt darstellen, so daß die Gleichung durch

$$(x + my + n)(x + py + q) = 0$$

ausgedrückt werden kann. Damit diese Zerlegung ausführbar ist, muß zwischen den bekannten Größen folgende Bedingungsgleichung bestehen:

$$(ac - 2d)^2 = (a^2 - 4b)(c^2 - 4e).$$

So kann z. B.:

$$x^2 + 5xy + 6y^2 + 2x + y - 15 = 0$$

durch $(x + 2y - 3)(x + 3y + 5)$

dargestellt werden. Fehlt das Glied y^2, hat die Gleichung also die Form:

$$x^2 + axy + bx + cy + d = 0,$$

so kann man sie durch

$$(x + my + n)(x + p) = 0$$

ausdrücken, wenn die Koeffizienten die Bedingung

$a^2d = (ab - c)c$ erfüllen.

Zum Beispiel:

$$x^2 + 4xy + 5x + 8y + 6 = 0.$$

Zerlegung:

$$(x + 4y + 3)(x + 2) = 0.$$

Um die Gleichung von der Form:

$y^2 + axy + bx + cy + d = 0$ durch $(y + mx + n)(y + p)$ ersetzen zu können, muß $a^2d = (ac - b)b$ sein. So kann man z. B. die Gleichung:

$$y^2 - 5xy - 20x + 11y + 28 = 0$$

in der Form:

$$(y - 5x + 7)(y + 4) = 0 \quad \text{schreiben.}$$

Fehlen endlich die Glieder x^2 und y^2, hat also die Gleichung die Form:

$$xy + ax + by + c = 0,$$

so kann man die linke Seite in ein Produkt von der Form $(x + m)(y + n)$ zerlegen, wenn $c = ab$ ist. Z. B.:

$$xy + 4x - 9y - 36 = 0.$$

Zerlegung:

$$(x - 9)(y + 4) = 0.$$

Man sehe ferner § 47, besonders 3) und 4).

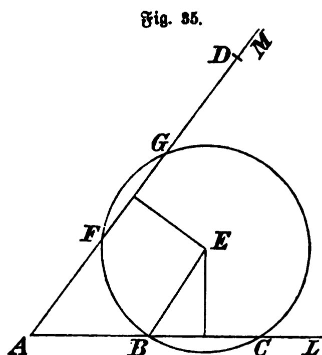
§ 111. Zeichnerische Darstellung quadratischer Gleichungen.

a) Rein geometrische Konstruktion. Gegeben sei die Gleichung:

$$x^2 - ax + bc = 0,$$

welche nach § 105, 5) zwei positive Wurzeln hat, falls dieselben überhaupt reell sind. Man zeichne von einem Punkte A zwei Geraden unter einem beliebigen Winkel α und trage von A aus auf AL nach einer Lineareinheit $AB = b$, $AC = c$, auf AM die Strecke $AD = a$ ab. Auf den Abschnitten BC und AD errichte man die Mittelsenkrechten und beschreibe von ihrem Schnittpunkt E aus mit BE einen Kreis. Die Strecken AF und AG versinnlichen die Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

Fig. 35.



Beweis. Bezeichnet der Abschnitt AF die Zahl x, so versinnlicht die Strecke AG die Wurzel $a - x$. Nun ist aber nach dem Sekantensatze $\overline{AF} \cdot \overline{AG} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ oder:

$$x(a - x) = b \cdot c, \quad \text{d. i.} \quad x^2 - ax + bc = 0.$$

Fig. 35 stellt die Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$ dar. Es ist $AB = 2$, $AC = 4$, $AF = x_1 = 2$ und $AG = x_2 = 4$. Geht der Kreis durch die Fußpunkte der Mittelsenkrechten, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln, und berührt derselbe die Gerade AM nicht, so sind die Werte für x imaginär oder komplex.

b) Versinnlichung durch krumme Linien. Um eine quadratische Gleichung von der Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

bildlich darzustellen, ersetzt man 0 durch die abhängig veränderliche Größe y und verfährt dann genau so wie in § 98. Soll z. B. die Linie gezeichnet werden, welche der Gleichung:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

entspricht, so setze man:

$$y = x^2 + 3x - 4.$$

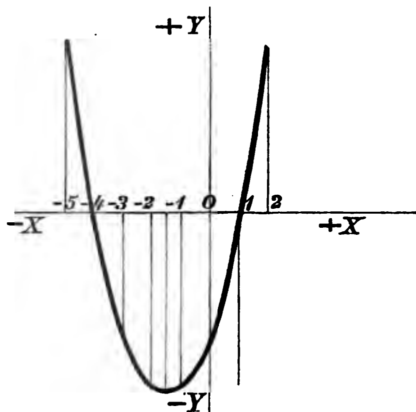
Für die Werte:

$x = \cdots\cdots -5, \; -4, \; -3, \; -2, \; -1, \quad 0, \; 1, \; 2, \; 3, \cdots\cdots$

wird:

$y = \cdots\cdots \quad 6, \quad 0, \; -4, \; -6, \; -6, \; -4, \; 0, \; 6, \; 14.$

Fig. 36.



Zeichnet man nun ein rechtwinkeliges Koordinatensystem (§ 98), stellt die Abscissen mit ihren zugehörigen Ordinaten dar und

verbindet die Endpunkte derselben durch einen Zug aus freier Hand, so entsteht eine offene krumme Linie (Fig. 36). Dies Bild der Gleichung:

$$y = x^2 + 3x - 4$$

wird offenbar um so genauer gezeichnet werden können, je mehr Punkte man berechnet, und wenn man für x auch Brüche setzt und hiernach y bestimmt.

Gewisse quadratische Gleichungen haben die Eigenschaft, daß ihr räumliches Bild stets dieselbe Kurve ist. Es sei z. B. die Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

zeichnerisch darzustellen. Man gebe der Gleichung die Form:

$$y = \sqrt{25 - x^2}.$$

Um zuerst festzustellen, ob und eventuell in welchem Punkte die gesuchte Linie die Ordinatenachse schneidet, setze man $x = 0$, so wird:

$$y = \pm \sqrt{25} = \pm 5.$$

Folglich wird die Y-Achse oberhalb und unterhalb der X-Achse in dem Abstande von 5 Längeneinheiten (von 0) geschnitten. Setzt man, um die Schnittpunkte des Bildes mit der X-Achse zu bestimmen, $y = 0$, so findet man aus:

$$\sqrt{25 - x^2} = 0, \quad x = \pm 5.$$

Trägt man also vom Anfangspunkt aus die Abscissen $x = 5$ und $x = -5$ ab, so hat man die gesuchten Schnittpunkte. Alle Zahlenwerte für x, die größer als $+5$ und kleiner als -5 sind, machen den Radikanden negativ und liefern für y imaginäre Zahlen, d. h. es giebt für diese Werte keine Ordinaten. Alle übrigen (reellen) Werte für x liegen zwischen 0 und $+4$, bezw. zwischen 0 und -4. Wir schließen daraus, daß die gesuchte Linie nach allen Seiten geschlossen sein muß.

Für $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ wird $y = \pm\sqrt{24}, \pm\sqrt{21}, \pm 4$. Da jeder Wert für die Abscisse x zwei absolut gleiche, der Lage nach entgegengesetzte Ordinaten liefert, so muß die

krumme Linie oberhalb und unterhalb der X-Achse dieselbe Gestalt haben. Und weil ferner obige Gleichung für je zwei absolut gleiche, der Lage nach entgegengesetzte Abscissen x und $-x$, stets gleiche Ordinaten giebt, so muß auch die Y-Achse die fragliche Linie in zwei kongruente Teile zerlegen. Berechnet man noch für einige Werte der Größe x die Ordinaten, stellt die Koordinaten dar und verbindet die erhaltenen Punkte der gesuchten Linie durch einen Zug, so entsteht die Kreislinie. Der Mittelpunkt derselben und der Anfang der Koordinaten fallen zusammen. Jeder Gleichung, welche die Form:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

hat oder auf dieselbe zurückgeführt werden kann, entspricht das räumliche Bild der Kreislinie. Daher nennt man die allgemeine Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung des Kreises.

Das geometrische Bild einer Gleichung von der Form:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist die Ellipse.*) Jede Gleichung, welche die Form:

$$y = \sqrt{px} \quad \text{oder} \quad y^2 = px$$

erfüllt, giebt durch Zeichnung versinnlicht eine Parabel**), deren Achse die Abscissenachse ist und deren Scheitel in den Anfang der Koordinaten fällt. Hat endlich die Gleichung die Form:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

so bezeichnet sie räumlich aufgefaßt eine Hyperbel.***)

*) Die Summe der Entfernungen eines jeden Ellipsenpunktes von zwei festen (Brenn-)Punkten ist stets dieselbe, nämlich gleich der großen Achse.

**) Jeder Punkt der Parabel hat gleichen Abstand vom Brennpunkt und von der Leitlinie (Ordinatenachse). Die Parabel ist nach einer Seite offen, die Achse teilt die Kurve in zwei gleiche Zweige, die sich ins Unendliche erstrecken.

***) Die Differenz der Entfernungen jedes Hyperbelpunktes von zwei festen Punkten (Brennpunkten) ist unveränderlich und zwar ihrer (Haupt-)Achse gleich. Eine Hyperbel besteht aus zwei gleichen, getrennten Zweigen, die ohne Grenzen fortgehen.

§ 112. Auflösung eingekleideter quadratischer Gleichungsaufgaben mittels geometrischer Versinnlichung.

Die zeichnerische Darstellung setzt uns instand, eingekleidete Aufgaben, deren Lösung auf ein System Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten führt, elementar zu lösen, also eine Auflösung zu schaffen, zu deren Verständnis keinerlei algebraische Kenntnisse erforderlich sind.

1) Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die miteinander vervielfältigt 576 und durcheinander geteilt $2\frac{1}{4}$ geben.

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchten Zahlen mit x und y, so kann man laut den Bedingungen der Aufgabe folgende Gleichungen aufstellen:

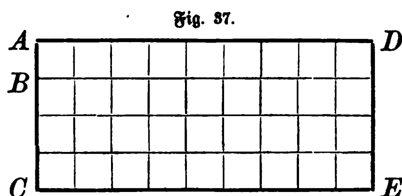
$$1)\quad xy = 576; \qquad 2)\quad \frac{x}{y} = 2\tfrac{1}{4}.$$

Die Auflösung durch räumliche Darstellung würde etwa, wie folgt, lauten:

Beim Teilen beider Zahlen erhält man den Bruch $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$; mithin ist die eine Zahl $\frac{9}{4}$ mal so groß als die andere, oder die größere Zahl besteht aus 9 solchen Teilen, wie die andere deren 4 enthält.

Die Strecke AB in Fig. 37 veranschauliche einen dieser gleichen Teile, so versinnlicht die Strecke AC (= 4 dieser

Fig. 37.



Teile) die kleine, und die Strecke AD, als aus 9 gleichen Teilen bestehend, die größere Zahl.

Das Rechteck $ACED$ stellt alsdann das Produkt beider Zahlen, nämlich die Zahl 576 vor. Dieses Rechteck läßt sich aber mittels Parallelen durch die Teilpunkte in $4 \times 9 = 36$

unter sich gleiche Quadrate zerlegen. Ein Quadrat veranschaulicht also die Zahl $576 : 36 = 16$; und die Seite eines solchen Quadrates bezeichnet die $\sqrt{16} = 4$. Die eine Zahl wird nach der Zeichnung durch die Strecke $AC = 4 \cdot AB$ veranschaulicht; sie beträgt daher offenbar $4 \cdot 4 = 16$. Die Strecke $AC = 9 \cdot AB$ versinnlicht die andere Zahl; folglich ist letztere $9 \cdot 4 = 36$.

Auf dieselbe Weise können alle Aufgaben behandelt werden, in welchen der Quotient bezw. das Verhältnis und das Produkt der Unbekannten gegeben sind, z. B:

„Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 : 3; ihr Produkt ist 735. Welche Zahlen sind es?"

2) Aufgabe. Der Quotient zweier Zahlen beträgt 6, der Unterschied ihrer Quadrate 560. Wie heißen die Zahlen?

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchten Zahlen mit x und y, so hat man folgende Gleichungen:

$$1)\quad \frac{x}{y} = 6; \qquad 2)\quad x^2 - y^2 = 560.$$

Auflösung mittels geometrischer Darstellung.

Da der Quotient beider Zahlen 6 beträgt, so ist die eine Zahl 6 mal so groß als die andere.

Die Strecke AB Fig. 38 veranschauliche die kleinere und $AC = 6 \times AB$ die größere Zahl.

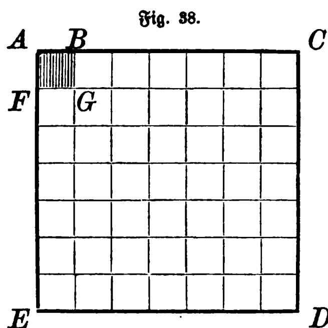


Fig. 38.

Die Quadrate beider Zahlen sind durch $ABFG$ und $ACDE$ dargestellt.

Das Quadrat über der Strecke AC besteht aus 36 unter sich gleichen Quadraten, von welchen jedes gleich $ABFG$ ist. Der Unterschied der Quadrate beider Zahlen ist also durch 35 kleine Quadrate versinnlicht, und zwar stellen dieselben nach der Aufgabe die Zahl 560 dar.

Mithin veranschaulicht ein kleines Quadrat die Zahl $560 : 35 = 16$ und die Seite desselben die $\sqrt{16} = 4$. Die

größere Zahl, welche durch die Strecke AC versinnlicht wird, beträgt also $6 \times 4 = 24$.

3) Aufgabe. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 4, die Summe ihrer Quadrate 136. Welches sind die Zahlen?

Auflösung. Die größere der gesuchten Zahlen werde durch die Strecke AB, ihr Quadrat durch $ABDE$ versinnlicht.

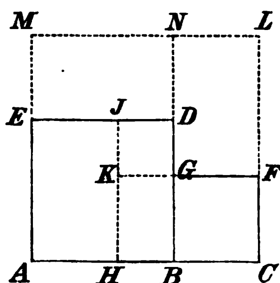


Fig. 39.

Ferner bezeichne BC die andere Zahl und $BCFG$ das Quadrat derselben. Macht man $CH = AB$, zieht durch H die Parallele HJ zu AE und verlängert FG bis K, so wird die Summe beider Quadrate in zwei kongruente Rechtecke, $AHJE$, $CFKH$ und das Quadratchen $GDJK$ zerlegt. Da die zwei Quadrate zusammen die Zahl 196 versinnlichen und das Quadratchen die Zahl $4^2 = 16$ bezeichnet, so veranschaulichen die Rechtecke die Zahl $196 - 16 = 120$. Ergänzt man nun die Zeichnung zu dem Quadrate über AC, so stellt dieses die Zahl:

$$136 + 120 = 256,$$

und die Seite AC die $\sqrt{256} = 16$ dar. Die eine Zahl ist daher $\frac{1}{2}(16 + 4) = 10$ und die andere $\frac{1}{2}(16 - 4) = 6$.

4) Aufgabe. Wie muß man 16 teilen, daß das Produkt der beiden Teile, zu ihren Quadraten addiert, die Summe 208 giebt?

Auflösung. Hier lautet die Gleichung mit einer Unbekannten:

$$x^2 + (16 - x)^2 + (16 - x) \cdot x = 208.$$

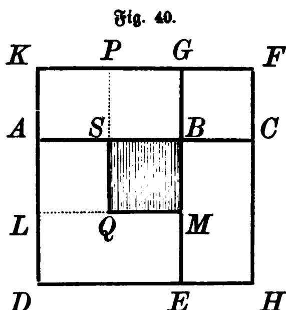
Das System von zwei Unbekannten heißt:

$$1) \quad x + y = 16; \qquad 2) \quad x^2 + y^2 + xy = 208.$$

Die Strecke AC (Fig. 40) veranschauliche die Zahl 16; AB und BC mögen die gesuchten Teile darstellen. Die Quadrate der beiden Zahlen sind durch $ABDE$ und $BCFG$ und das Produkt derselben ist durch das Rechteck $BCEH$ versinnlicht.

Bildet man das Rechteck $ABGK$, das offenbar dem Rechteck $BCHE$ gleich ist, so entsteht das Quadrat über der Strecke $DH = AC$, welches die Zahl $16^2 = 256$ darstellt. Da nach der Zeichnung die Quadrate der Strecken AB und BC, sowie das Rechteck $BCHE$ die Zahl 208 veranschaulichen, so versinnlicht das Rechteck $ABGK$ offenbar die Zahl $256 - 208 = 48$. Macht man DL und $KP = BC$, und zieht die Parallelen LM und PQ, so stellen die entstehenden Rechtecke $DEML$ und $KPQL$ ebenfalls das Produkt (48) der gesuchten Zahlen vor. Zieht man die vier gleichen Rechtecke $BCHE$, $DEML$, $KPQL$ und $CFPS$ vom Quadrate $DHFK$ ab, so bleibt das Parallelogramm $QMBS$. Letzteres ist aber ersichtlich ein Quadrat, dessen Seitenlänge gleich dem Unterschied der Strecken AB und BC ist. Die vier abgezogenen Rechtecke veranschaulichen die Zahl $4 \times 48 = 192$; also versinnlicht das Quadrat $QMBS$ die Zahl $256 - 192 = 64$ und eine Seite desselben die $\sqrt{64} = 8$. Der Unterschied der gesuchten Zahlen ist daher 8; nach der Aufgabe beträgt ihre Summe 10. Durch diese Angaben ist die Auflösung beschafft, da die gegebene Aufgabe auf eine bekannte leichte zurückgeführt ist.

Fig. 40.



Sechster Abschnitt.

Dritte Erweiterung des Zahlenbegriffs: irrationale Zahlen.*)

§ 113. Begriff der Irrationalzahlen.

Bei der Definition der Quadratwurzel aus einer Zahl ist vorausgesetzt, daß der Radikand eine ganze oder gebrochene Potenz von einer ganzen Zahl oder von einem Bruche ist (§ 18, VI (Seite 119), §§ 61, 63 und 64). Die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, welche diese Bedingung erfüllen, heißen Quadratzahlen, z. B. 1, 4, 9, 16 u. s. w. Indes kommen sowohl in der Wurzelrechnung als in der Geometrie häufig Größen vor, deren Wurzeln sich durch keine von den uns bis jetzt bekannten Zahlformen angeben lassen.**)

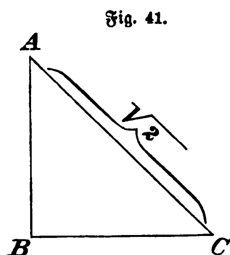


Fig. 41.

In dem rechtwinkeligen gleichschenkeligen Dreiecke ABC versinnliche jede Kathete die Zahl 1. Alsdann stellt die Hypotenuse AC die Zahl $\sqrt{2}$ vor. Um also die Länge der Hypotenuse AC durch eine Zahl auszudrücken, muß man aus 2 die Quadratwurzel ziehen. Die Rechnung bis auf zwölf Dezimalen fortgeführt, liefert $\sqrt{2} = 1{,}414213562375 \cdots$, das

---

*) Dieser Abschnitt dürfte im Unterricht wohl am zweckmäßigsten mit der Auflösungslehre der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten verbunden werden.

**) Durch die Untersuchung des Verhältnisses zweier Größen ist man auf die Irrationalzahlen gekommen. Man sehe § 79, 2.

Ergebnis ist eine unendliche, unperiodische Dezimalzahl. Die folgende Betrachtung zeigt, daß die Rechnung nicht aufgehen kann.

Den Wurzeln der Zahlen 1 und 2 entsprechen die Quadratzahlen 1 und 4. Die Quadratwurzeln aus den zwischen 1 und 4 liegenden Zahlen, nämlich aus 2 und 3, können keine der uns bis jetzt bekannten Zahlengrößen sein. Der Wert von $\sqrt{2}$ kann keine ganze Zahl sein; denn $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$; folglich liegt die gesuchte Wurzel zwischen 1 und 2, und zwar bleibt nur übrig, daß der Wurzelwert von 2 eine gemischte Zahl (§ 51) wäre. Gesetzt nun, die letztere sei $1 + \frac{a}{b}$, wofür wir den gehobenen Bruch $\frac{p}{q}$ setzen, so müßte nach dem Begriffe der Quadratwurzel

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

sein. Zähler und Nenner des Bruches $\frac{p}{q}$ können nun entweder relative Primzahlen oder nicht relativ prim sein. Sind p und q relative Primzahlen, so sind ihre Quadrate ebenfalls Primzahlen, und folglich ist p^2 durch q^2 nicht teilbar, d. h. $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ ein Bruch. Wenn p und q nicht relative Primzahlen bezeichnen, so haben sie einen gemeinschaftlichen größten Teiler t, und es stellen alsdann die Buchstaben in den Ausdrücken $p : t$, $q : t$ relative Primzahlen dar (§ 65); mithin ist wie vorhin $\left(\frac{p : t}{q : t}\right)^2$ ein Bruch. Da aber nach dem Gesetz der Wertbeständigkeit eines Bruches (§ 53)

$$\frac{p : t}{q : t} = \frac{p}{q}, \quad \text{so muß} \quad \left(\frac{p : t}{q : t}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2,$$

also der Wert von $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ auch in dem Falle ein Bruch sein, wenn p und q nicht relative Primzahlen sind. Die Quadratwurzel aus 2 kann auch keine periodische Dezimalzahl sein; denn diese Zahlen können durch einen geschlossenen gewöhnlichen Bruch dargestellt werden. Der Ausdruck $\sqrt{2}$ bezeichnet also weder eine reine ganze, noch eine gemischte

Zahl, noch einen gewöhnlichen Bruch, noch eine endliche oder unendliche periodische Dezimalzahl. Wir haben es also hier mit einer neuen Zahlform zu thun, mit einer Zahlgröße, welche sich weder durch die ganze Einheit noch durch Brucheinheiten genau messen läßt (§ 79, 2). Zahlgrößen von dieser Eigenschaft nennt man Irrationalzahlen. Im Gegensatz hierzu hat man den übrigen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe den Namen Rationalzahlen beigelegt. Die Irrationalzahlen sind die eigentlichen Wurzelgrößen, und man unterscheidet die Wurzelformen häufig in irrationale und rationale oder ausführbare Wurzeln.

Unter den Gliedern der natürlichen Zahlenreihe giebt es sehr viele Irrationalzahlen; bei weitem die größte Anzahl derselben gehört hierher. Jede Quadratwurzel aus einer Primzahl liefert eine Zahl dieser Art. Im Zahlengebiet 1 bis 100 sind nur 10 Zahlen mit rationalen Wurzeln, unter den Zahlen von 1 bis 1000 nur 31. Bezeichnen n und $(n+1)$ zwei beliebige aufeinander folgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, so sind zwischen ihren Quadraten, nämlich n^2 und n^2+2n+1 stets $2n$ Irrationalzahlen enthalten. Denn wäre ein durch die kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch $\frac{p}{q}$ die wirkliche Quadratwurzel dieser Zahlen, so müßte $\left(\frac{p}{q}\right)^2$, also das Quadrat eines Bruches aus relativen Primzahlen gleich einer **ganzen** Zahl sein, was unmöglich ist, wie wir vorhin gezeigt haben. Auch die Quadratwurzeln aus Brüchen liefern nur in dem Falle rationale Zahlen, wenn Zähler und Nenner vollkommene Quadratzahlen sind.

Nicht bloß das Ausziehen der Quadratwurzeln aus einfachen Zahlgrößen, sondern auch aus zusammengesetzten algebraischen Zahlenausdrücken liefert viele irrationale Wurzeln. Letztere entstehen ferner auch durch das Ausziehen der dritten, vierten, überhaupt der $n$ten Wurzel. Wenn auch die Irrationalzahlen oder eigentlichen Wurzelgrößen zwar nicht durch eine ganze oder Bruchzahl bezeichnet (ersetzt) werden können, so kann man ihren Wert doch nach Belieben in zwei Grenzen ein-

schließen, so daß ihre Differenz sich immer mehr der Null nähert. So liegt z. B. $\sqrt{2}$ zwischen 1,4143 und 1,4142, zwischen 1,4142136 und 1,4142135. (Vergleiche Seite 231.) Auch ist es gebräuchlich, bei Angabe des Wertes einer Irrationalzahl dieselbe gleich einer rationalen Zahl zu setzen, z. B. zu schreiben, $\sqrt{5} = 2{,}236 \cdots$ Die uneigentliche Anwendung des Gleichheitszeichens bei dieser Schreibweise ist durch einige Punkte hinter der letzten Dezimalstelle angedeutet.

Da die Irrationalzahlen, wie bereits gesagt wurde, sich weder durch die ganze noch durch irgend eine Bruch-Einheit genau messen lassen, mithin keine auch noch so kleine Zahlgröße zum gemeinschaftlichen Maße haben können, so nennt man eine Irrational- und eine Rationalzahl auch inkommensurable Größen. Ihr Verhältnis ist also inkommensurabel (§ 79, 2). Dasselbe gilt von zwei Irrationalzahlen verschiedener Art, z. B. $\sqrt{5}$ und $\sqrt[3]{7}$. Im Gegensatze hierzu heißen alsdann die ganzen Zahlen, die Brüche und die Dezimalzahlen mit einem gemeinsamen Namen kommensurable Zahlen.

Früher wurde bereits gesagt, daß inkommensurable Größen häufig in der Geometrie vorkommen. Ein Fall ist zu Anfang dieses Abschnittes dargestellt worden, nämlich die Hypotenuse eines rechtwinkeligen, gleichseitigen Dreiecks oder die Diagonale eines Quadrates versinnlicht stets eine Irrationalzahl. Seite und Diagonale eines Quadrates bilden also in Beziehung zu einander inkommensurable Größen, ihr Verhältnis ist inkommensurabel. Folgende Beispiele über Irrationalzahlen bezw. inkommensurable Größen mögen hier noch Erwähnung finden. In jedem gleichseitigen Dreieck liefert der arithmetische Ausdruck für die Höhe eine Irrationalzahl. Bezeichnet man die Seitenlänge dieses Dreiecks mit s, die Höhe mit h, so ist nach dem pythagoreischen Lehrsatze:

$$h = \frac{s}{2}\sqrt{3}.$$

Auch die arithmetischen Ausdrücke für die Längen der Seiten des regelmäßigen Zehnecks und des Fünfecks im Kreise mit

dem Halbmesser r, nämlich:

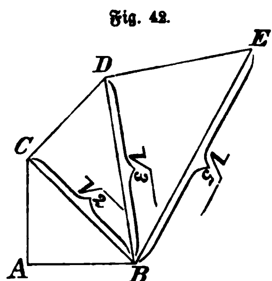
$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{und} \quad s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

sind irrationale Zahlen, die Linien in Beziehung zum Halbmesser also inkommensurable Größen.

§ 114. Konstruktion der Irrationalzahlen.

Bildet man ein rechtwinkeliges Dreieck mit gleichen Katheten und setzt ihre Länge gleich der Einheit, so veranschaulicht die Hypotenuse BC genau die $\sqrt{2}$ (Fig. 42). Zeichnet man nun ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten 1 und $\sqrt{2}$, so versinnlicht die Hypotenuse desselben, also BD, die $\sqrt{3}$. Und konstruiert man hierauf ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten die Wurzeln $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ darstellen, so liefert die Hypotenuse dieses Dreiecks, also BE, ein anschauliches Bild der Irrationalzahl $\sqrt{5}$.*)

Fig. 42.



Um eine irrationale Wurzel von der Form $\sqrt{a} = \sqrt{1 \cdot a}$ durch eine einzige Konstruktion als Strecke darzustellen, benutze man die folgenden Lehrsätze über das rechtwinkelige Dreieck: a) Die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse ist mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse. b) Jede Kathete ist mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt (Projektion dieser Kathete).

Es sei z. B. $\sqrt{5}$ nach Lehrsatz a) zu versinnlichen. Die gesuchte Strecke, die Seitenlänge eines Quadrates, sei x, also $x^2 = 5 \cdot 1$ oder in Proportionsform: $5 : x = x : 1$. Um x zu finden, zeichne eine Strecke $AB = 6$ Längeneinheiten, beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte im Endpunkt der die Zahl 5 darstellenden Strecke die Rechtwinkelige und ver-

*) Es ist sehr zweckmäßig, im Unterricht eine Anzahl irrationaler Wurzeln durch geometrische Darstellungen zu versinnlichen.

längere sie bis zur Kreislinie, so veranschaulicht diese Senkrechte die Zahl $\sqrt{5}$. Mit Benutzung des Lehrsatzes b) ist das Verfahren folgendes: Ziehe eine Strecke $AB = 5$ Längeneinheiten, beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte im ersten Teilpunkt die Rechtwinkelige CD und verbinde A mit D, so ist AD die gesuchte Strecke für $\sqrt{5}$. Zum Beweise ziehe man BD, so ist Dreieck ABD rechtwinkelig und folglich $AD = y$ mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse $AB = 5$ und dem Abschnitte $AC = 1$, d. h.:

$$y^2 = 5 \cdot 1 \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{5}.^{*)}$$

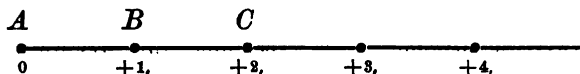
Kommen wir nun auf unsere geometrische Abbildung der Zahlen zurück. Wir haben zuerst die natürliche Zahlenreihe durch Punkte versinnlicht, die von einem Anfangs- (Null-) Punkte aus in gleicher Entfernung voneinander in einer nach einer Seite unbegrenzten Geraden liegen (§ 1). Die Subtraktion einer größern Zahl von einer kleinern führte auf eine neue Zahlform, die negativen Zahlen. Um diese anschaulich darzustellen, sahen wir uns genötigt, die ursprüngliche Punktreihe nach der entgegengesetzten Seite von Null ebenfalls unbegrenzt zu erweitern. So erhielten wir ein anschauliches Bild der relativen Zahlenreihe (§ 31). Durch die Division gelangten wir ebenfalls zur Kenntnis einer neuen Art von Zahlen, nämlich der Brüche, welche durch Einschalten von Punkten zwischen die ursprünglichen versinnlicht wurden (§ 58). Nach Kenntnis der Irrationalzahlen können wir nun auch diese durch Einschaltung von Punkten zur Anschauung bringen. Um die Lage der Punkte, welche z. B. die Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ darstellen, zu finden, stelle man nach obiger Anleitung die Strecken derselben dar und trage diese mit dem Zirkel von Null aus auf dem positiven Teile des Zahlenbildes ab. Man kann den Punkt, der einer Irrationalzahl entspricht, annähernd dadurch finden, daß man zwei Grenz-

*) Recht ersprießlich ist es, wenn einzelne Schüler diese Darstellungen von Irrationalzahlen an der Schultafel ausführen und hierauf Aufgaben dieser Art von den Schülern selbständig in einem Hefte bearbeitet werden.

werte derselben bildlich darstellt, diese Grenzen und folglich auch die ihnen zugeordneten Punkte näher und näher rückt und so dem richtigen Punkte, der die Irrationalzahl versinnlicht, beliebig nahe kommt.

Vor Kenntnis der irrationalen Zahlen stellten sich in unserm Zahlenbilde alle Zahlengrößen (Ganze und Brüche) als eine Reihe von Punkten dar, die in sehr kleiner Entfernung voneinander in einer durch zwei Punkte gedachten Geraden liegen. Durch Einschaltung der Irrationalzahlen werden nun alle Lücken, die noch vorhanden waren, mit Punkten ausgefüllt, so daß nun das Zahlenbild in eine geometrische Größe, nämlich in eine unbegrenzte gerade Linie übergeht. Somit kann jeder Punkt einer Geraden als die Versinnlichung einer Zahl gelten. Durch diese Vorstellung wird der Begriff der Stetigkeit, der den Raumgrößen anhaftet, in die Arithmetik, die Lehre von den getrennten Größen, übertragen. Wie in der Geometrie ein sich bewegender Punkt A (Fig. 43), der seine Richtung nicht ändert, eine Gerade AC erzeugt und bei dieser Bewegung seinen Ort

Fig. 43.

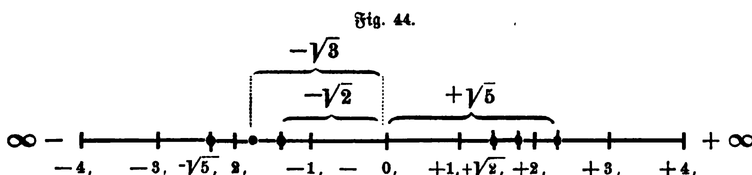


(Lage) stetig ändert, also die Größe AB alle Längen erhält, welche zwischen AB und AC möglich sind, so sagt man in der Arithmetik: eine Zahlgröße x (Variable) hat ihren Wert, von $x=1$ bis $x=2$ wachsend, stetig durchlaufen, und versteht unter dieser Ausdrucksweise, daß die Größe x nach und nach alle zwischen 1 und 2 möglichen rationalen und irrationalen Zahlenwerte angenommen habe. Alle diese verschiedenen Werte werden durch die stetig aufeinander folgenden Punkte der Länge AB durch ihren Abstand vom Nullpunkte versinnlicht. Die Anwendung des Begriffes der stetigen Änderung in der Arithmetik geht aus folgenden Beispielen hervor:

a) wächst x stetig von 1 bis 10, so wächst x^2 von 1 bis 100;
b) ändert x seinen Wert stetig von 0 bis 100, so ändert sich der Wert des Ausdrucks $10x - 3$ von -3 bis 997;
c) durchläuft x alle Werte von 1 bis ∞ stetig wachsend, so nimmt der Wert des Quotienten $\frac{1}{x}$ von 1 bis 0 stetig ab.

Die folgende Darstellung giebt uns ein Bild einiger uns bis jetzt bekannten Arten von Zahlgrößen:

Fig. 44.



§ 115. Rechnen mit Irrationalzahlen.

Die irrationalen Wurzeln werden der Definitionsformel II § 26, nämlich:

$$\left(\sqrt[n]{p}\right)^n = p$$

unterworfen, die früher gemachte Einschränkung, daß der Radikand der Wurzel radizierbar sein müsse, lassen wir nun fallen. So bezeichnet der Ausdruck $\sqrt{a}$ diejenige Zahl, deren zweite Potenz a ist, gleichviel ob der Radikand a ein Quadrat ist oder nicht. Nur bleibt vorläufig die Bedingung bestehen, daß a positiv ist. Unter den Zeichen $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ versteht man die Zahlen, deren Quadrate die Werte 5, 7 liefern. Die Irrationalzahlen können, wie schon Fig. 44 versinnlicht, positiv oder negativ sein. Zerlegt man z. B. die Gleichung:

$$x^2 - 10 = 0$$

nach § 104 in die einfachen Gleichungen:

$$1)\quad x + \sqrt{10} = 0 \quad \text{und} \quad 2)\quad x - \sqrt{10} = 0,$$

so erhält man die Wurzeln:

$$x_1 = +\sqrt{10} \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{10}.$$

Es ist daher sowohl $(+10\sqrt{})^2$ als auch $(-\sqrt{10})^2$, kurz $(\pm\sqrt{10})^2 = 10$. Allgemein hat die Gleichung $x^2 = a$ die Wurzeln $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ auch in dem Falle, wenn $+\sqrt{a}$ keine ausführbare Wurzel bezeichnet.

Da die Irrationalzahlen der Definition der rationalen Wurzeln unterworfen worden sind, so müssen alle Rechengesetze, welche sich auf diesen Begriff stützen, auch für irrationale Wurzeln Geltung haben. Alle in den §§ 26—27 unter VI Seite 119 und § 64 aufgestellten Lehrsätze sind also auch für Irrationalzahlen gültig. So ist z. B.:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10; \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15};$$
$$\sqrt{48} : \sqrt{12} = 2.$$

Für das praktische Rechnen mit Wurzeln sind noch folgende Regeln zu merken.

I) Irrationale Wurzeln werden in der Rechnung häufig durch ein Produkt aus einem rationalen und irrationalen Faktor dargestellt. Um diese Umformung zu vollziehen, zerlege man den Radikanden in einen (oder mehrere) radizierbaren Faktor und schreibe die Wurzel desselben vor den irrationalen Faktor. Z. B.:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}; \quad \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64 \cdot 2} = 4\sqrt[3]{2};$$
$$\sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} = \sqrt{\tfrac{a^2}{4} \cdot 3} = \tfrac{a}{2}\sqrt{3}\,\cdot$$
$$\sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{50} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$
$$\sqrt{a^3 + 2ab^2 + ab^2} = \sqrt{(a+b)^2 \cdot a} = (a+b)\sqrt{a}.$$

II) Soll umgekehrt eine rationale oder irrationale Zahl, welche mit einer Wurzel durch eine Operation der zweiten Stufe verknüpft ist, unter das Wurzelzeichen gebracht werden, so muß man erstere mit dem Exponenten der Wurzel potenzieren, z. B.:

$$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{45}; \quad a\sqrt[n]{b} = \sqrt{a^n b}.$$

$$\frac{\sqrt[x]{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^x}}.$$

$$\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{3}{5}}; \quad \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{a}.$$

III) Um die Summe oder Differenz zweier Wurzeln in **einen** Ausdruck zu vereinigen, erhebe man dieselbe in die Potenz des Wurzelexponenten, den die gesuchte Wurzelform erhält und radiziere die erhaltene Potenz durch denselben Exponenten. Der zuletzt erhaltene Ausdruck ist dem ursprünglichen gleich, weil $p = \sqrt{p^2}$ ist. Z. B.:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}};$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18};$$

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}) = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b})^2} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}(2a \pm 2\sqrt{a^2 - 4b^2})} = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}}.$$

IV) Zur Vermeidung der Division durch eine Irrationalzahl, überhaupt zur Vereinfachung der Rechnung, formt man Brüche mit irrationalem Nenner häufig so um, daß der letztere rational wird.

a) Ist der Nenner eingliedrig und heißt er allgemein $\sqrt[n]{a^m}$, so multipliziere man Zähler und Nenner mit $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ oder $\sqrt[n]{a^{m-n}}$, je nachdem $n \gtrless m$ ist. Um also:

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt[3]{a}, \quad \sqrt[3]{a^2}, \quad \sqrt{a^3}$$

aus dem Nenner fortzuschaffen, multipliziere man bezüglich mit

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt[3]{a^2}, \quad \sqrt[3]{a}, \quad \sqrt{a}. \qquad \text{Z. B.:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{5}\cdot\sqrt[3]{25};$$

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}; \quad \frac{a}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{a^2};$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{a-b}} = \sqrt{a-b}; \quad \frac{a-b}{\sqrt{a+b}} = \frac{a-b}{a+b}\sqrt{a+b}.$$

b) Besteht der Nenner aus der Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln oder enthält er eine rationale Zahl und eine Quadratwurzel, so benutze man die Formeln § 27, Seite 87. Z. B.:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 5+\sqrt{24};$$

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{21}}{2};$$

$$\frac{5-\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{(5-\sqrt{3})\cdot(4+2\sqrt{3})}{(4-2\sqrt{3})\cdot(4+2\sqrt{3})} = \frac{7+3\sqrt{3}}{2}.$$

V) Das surdische Binom.

a) Eine Zahlverbindung von der Form $a \pm \sqrt{b}$ heißt ein **surdisches** Binom oder eine surdische Zahl, a ihr rationales, b ihr irrationales Glied. Die Form $a + \sqrt{b}$ ist die einfachste Form (Normalform) einer surdischen Zahl. Letztere umfaßt die rationale und irrationale Zahl als besondere Fälle; denn aus $a + \sqrt{b}$ entsteht für $b = 0$ die rationale Zahl a und für $a = 0$ die irrationale Größe b. Sind zwei surdische Zahlen einander gleich, ist allgemein:

$$1) \quad a + \sqrt{b} = a_1 + \sqrt{b_1},$$

so besteht einerseits Gleichheit zwischen ihren rationalen Teilen, $a = a_1$, und andererseits zwischen ihren irrationalen Gliedern, $\sqrt{b} = \sqrt{b_1}$. Denn aus der Gleichung 1) folgt:

$$2) \quad b = (a_1 - a)^2 + b_1 + 2(a_1 - a)\sqrt{b_1}.$$

Da b eine rationale Zahl bezeichnet, so muß der Ausdruck rechts eine Zahl derselben Art darstellen. Diese Bedingung

wird nur erfüllt, wenn $a_1 - a = 0$, d. h. $a_1 = a$ ist, woraus die Gleichheit $b = b_1$ unmittelbar folgt.

b) Unterscheiden sich zwei surdische Binome nur durch das Vorzeichen des irrationalen Gliedes, so sagt man, die Zahlen seien inbezug aufeinander konjugiert surdisch, z. B. $5 + \sqrt{7}$ und $5 - \sqrt{7}$, allgemein:

$$u = a + \sqrt{b} \quad \text{und} \quad u_1 = a - \sqrt{b}.$$

Für das praktische Rechnen mit diesen wichtigsten surdischen Zahlen merke man sich folgende leicht zu beweisenden Formeln:

$$1)\quad u + u_1 = 2a; \qquad 2)\quad u - u_1 = 2\sqrt{b};$$

$$3)\quad u \cdot u_1 = a^2 - b; \qquad 4)\quad u^2 + u_1^2 = 2(a^2 + b);$$

$$5)\quad u^2 - u_1^2 = 4a\sqrt{b}.$$

Die Summe oder die Differenz der Quadratwurzeln aus konjugierten surdischen Binomen, also ein Ausdruck von der Form:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}},$$

läßt sich im allgemeinen ebenfalls durch eine zweite Wurzel aus einer surdischen Zahl darstellen. Um die Formel zu finden, nach welcher die Umformung dieser Verknüpfung in **einen** Wurzelausdruck vollzogen wird, setze man vorläufig:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x \pm \sqrt{y}}.$$

Erhebt man diese Gleichung ins Quadrat, so entsteht:

$$2a \pm 2\sqrt{a^2 - b} = x \pm \sqrt{y}.$$

Nun bestehen nach a) folgende Beziehungen:

$$x = 2a \quad \text{und} \quad \sqrt{y} = 2\sqrt{a^2 - b}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte für x und $\sqrt{y}$ in die erste Gleichung entsteht:

I. Formel: $$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}.$$

Diese Formel gilt auch für imaginäre Wurzeln (§ 116). Sie gewährt beim praktischen Rechnen besonders Vorteil in den Fällen, wenn $\sqrt{a^2 - b}$ eine rationale Zahl bezeichnet. Ist die

Größe $\sqrt{b}$ mit einem (rationalen) Faktor behaftet, so schaffe man denselben zunächst unter das Wurzelzeichen. Z. B.:

$$\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}=$$
$$=\sqrt{2(7-\sqrt{49-24})}=2.$$

$$\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}=\sqrt{2(7-\sqrt{49-13})}=\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{8+\sqrt{15}}\pm\sqrt{8-\sqrt{15}}=\sqrt{2(8\pm\sqrt{64-15})}=$$
$$=\sqrt{30} \text{ und } \sqrt{2}.$$

Umgekehrt kann man einen Ausdruck von der Form $\sqrt{m\pm\sqrt{n}}$ in die Summe zweier einfachen Quadratwurzeln von der Form $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ verwandeln, in welcher ein Glied auch rational sein kann. Die Formel, mittels welcher man diese Zerlegung ausführt, kann man aus I ableiten, wenn man:

$$2a=m, \qquad 2\sqrt{a^2-b}=\sqrt{n}$$

setzt, so daß also:

$$a=\tfrac{1}{2}m, \quad a^2-b=\tfrac{1}{4}n,$$

mithin

$$b=a^2-\tfrac{1}{4}n=\tfrac{1}{4}(m^2-n) \quad \text{und} \quad \sqrt{b}=\tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-n} \text{ wird.}$$

Setzt man diese Werte in die Umkehrung der Formel I ein, so entsteht:

II. Formel:

$$\sqrt{m\pm\sqrt{n}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(m+\sqrt{m^2-n})}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(m-\sqrt{m^2-n})}.$$

Die Anwendung dieser Formel hat nur dann einen Zweck, wenn der Ausdruck $\sqrt{m^2-n}$ eine rationale Zahl darstellt. Falls $\sqrt{n}$ mit einem (rationalen) Faktor verknüpft ist, bringe man denselben zuerst unter das Wurzelzeichen. Formel II dient auch zur Berechnung der Quadratwurzel aus einem surdischen Binom.

Beispiele:

1) $\sqrt{14+\sqrt{180}}$. Hier ist $m=14$, $n=180$. Diese Zahlenwerte in Formel II eingesetzt, giebt:

$$\sqrt{14+\sqrt{180}} =$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(14+\sqrt{196-180})} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(14-\sqrt{196-180})} =$$
$$= \sqrt{\frac{14+4}{2}} + \sqrt{\frac{14-4}{2}} = \pm(3+\sqrt{5}).$$

2) $$\sqrt{11-3\sqrt{8}} = \sqrt{11-\sqrt{72}} =$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(11+7)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(11-7)} = \pm(3-\sqrt{2}).$$

3) $$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{8+\sqrt{60}} =$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(8+2)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(8-2)} = \sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

4) $$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(2+1)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(2-1)} =$$
$$= \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

VI) Die Berechnung der irrationalen Quadrat- und Kubikwurzeln geschieht nach den im ersten und zweiten Abschnitt (§ 61) für rationale Wurzeln angegebenen Verfahren. Will man irrationale Quadrat- und Kubikwurzeln auf n Dezimalen berechnen, so hänge man dem Radikanden $2n$, bezw. $3n$ Nullen an, schreibe z. B. statt: $\sqrt{2}$ (3 Stellen) $\sqrt{2{,}00\,00\,00}$ oder füge, nachdem die Ganzen der Wurzel berechnet sind, den erhaltenen Resten rechts zwei bezw. drei Nullen an. Bei der Wurzelausziehung aus einem Dezimalbruche verfahre man nach den in § 61 angegebenen Regeln. Ist der Nenner desselben keine rationale Zahl, so gebe man durch Anhängung von Nullen dem Dezimalbruch $2n$ oder $3n$ Stellen, je nachdem die zweite oder die dritte Wurzel berechnet werden soll, so ist z. B.:

$$\sqrt{0{,}4} = \sqrt{0{,}40|00|00} = 0{,}632\cdots$$

Einen gewöhnlichen Bruch, dessen Nenner nicht eine zweite oder dritte Potenz ist, verwandelt man vor der Radizierung entweder in einen Dezimalbruch, oder man macht den Nenner nach IV) rational. So ist z. B.:

$$\sqrt{\tfrac{2}{5}} = \sqrt{0{,}4}, \quad \text{oder} \quad \sqrt{\tfrac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3{,}1622\cdots}{5} = 0{,}6324\cdots$$

Hat man n Dezimalstellen einer irrationalen Quadratwurzel berechnet, so findet man eine weitere Anzahl Stellen leicht und kurz durch Anwendung der kurzen Division (Anhang). Da nämlich die Quadrate der folgenden gesuchten Ziffern so klein sind, daß sie auf das Ergebnis der Rechnung keinen Einfluß haben, so kann man erstere unterdrücken. Bezeichnet man die erhaltenen Ziffern von $\sqrt{N}$ mit a und den Rest mit r, so ist:

$$N = a^2 + r \quad \text{und} \quad \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a},$$

wenn r im Vergleich zu a einen sehr kleinen Wert ausdrückt. Denn in:

$$\left(a + \frac{r}{2a}\right)^2 = a^2 + r + \left(\frac{r}{2a}\right)^2$$

bezeichnet $\left(\frac{r}{2a}\right)^2$ unter dieser Bedingung um so mehr eine sehr kleine Zahl und kann in der Rechnung vernachlässigt werden. Statt also das Normalverfahren durchzuführen, hänge man dem Reste r eine Null an und berechne dann zur Ermittelung der folgenden n Dezimalstellen den Wert des Quotienten $\frac{r}{2a}$ mittels der kurzen Division.

Beispiel.

$$\sqrt{5} = 2{,}2360679 \cdots$$

	4
$40 \div$	100
$2 \cdot 40 + 2^2 =$	84
$440 \div$	1600
$3 \cdot 440 + 3^2 =$	1329
$4460 \div$	27100
$6 \cdot 4460 + 6^2 =$	26796
$4472 \div$	3040
$4472 \div$	3040
	2683
$447 \div$	357
	313
	44.

Erläuterung. Die drei ersten Dezimalstellen sind durch das Normalverfahren bestimmt. Der Rest beträgt 304, nun ist die Division 3040 : 2 · 2236 abgekürzt ausgeführt. Genau dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man das Wurzelausziehen fortsetzt. Für die abgekürzte Berechnung einer Anzahl Dezimalstellen bei Ermittelung irrationaler Kubikwurzeln gilt die Formel:

$$\sqrt[3]{a^3 + r} = a + \frac{r}{3a^2},$$

wenn r gegen a sehr klein ist. Alsdann ist nämlich in $\left(a + \frac{r}{3a^2}\right)^3$ der Wert von $r\left(\frac{r}{3a^3} + \frac{r^2}{27a^6}\right)$ so klein, daß derselbe unbeschadet der Genauigkeit der Rechnung unberücksichtigt bleiben kann.

Wurzeltafel.

Radikanden.	Quadratwurzel.	Kubikwurzel.
2	1,41421	1,25992
3	1,73205	1,44224
4	2,00000	1,58740
5	2,23606	1,70997
6	2,44948	1,81712
7	2,64575	1,91293
8	2,82842	2,00000
9	3,00000	2,08008
10	3,16227	2,15443
11	3,31662	2,22398
12	3,46410	2,28942

Die Wurzeln aus Primzahlen können manchmal zur Berechnung der Wurzeln aus zusammengesetzten Zahlen mit Vorteil benutzt werden, so ist z. B.:

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 3 \cdot 1,4142 = 4,2426;$$

$$\sqrt[3]{40} = 2\sqrt[3]{5} = 2 \cdot 1,70997 = 3,41995.$$

Geschichtliches. Eine ausführliche Darlegung des Irrationalen findet sich im 10. Buch von Euklids „Elementen". Die Bezeichnung

„surdische“ Zahl, welche so viel als ungereimte, sinnlose Zahl bedeutet, kommt zuerst bei Leonardo Fibonacci (1202) vor. Das durch Formel II Seite 398 ausgesprochene Gesetz war schon dem Inder Bhaskara bekannt.*)

*) Wir schließen den Abschnitt über die Irrationalzahlen mit den Worten des Mathematikers G. Hauck: „In der Platonischen Schule galt die Erkenntnis, daß es Größen giebt, welche, auf einer Geraden vom Nullpunkt aus als Strecken abgeschnitten, doch auf keinen Punkt der auf der Geraden aufgetragenen unendlichen Zahlenreihe führen, als die höchste Weisheit, und daher der Pythagoreische Lehrsatz, welcher das wirkliche Vorkommen solcher unmöglich erscheinenden (surdi) Größen augenscheinlich darlegte, als eine göttliche Erkenntnis. Die Feinfühligkeit in dieser Hinsicht ist aber uns Modernen sehr abhanden gekommen; ja, man empfindet heute kaum mehr das Memento, welches das Wort „irrational“ in sich schließt. Ich will nicht sagen, daß es ungerechtfertigt gewesen sei, die scharfe Unterscheidung der Alten zwischen Zahlen und Größen fallen zu lassen. Daß aber an Stelle der Schärfe und Bestimmtheit der Begriffe der Alten vielfach unverantwortlicher Leichtsinn und Schlendrian Platz gegriffen hat, wird nicht geleugnet werden können. — Was ich übrigens mit dem allen sagen will, ist nur: die Lehre von den irrationalen Zahlen nicht in Verbindung mit dem Pythagoreischen Lehrsatz zu bringen, scheint mir — man gestatte das Wort — eine pädagogische Sünde zu sein.“ (Hoffmannsche Zeitschrift, XII. Jahrgang, Seite 352.)

Siebenter Abschnitt.

Vierte Erweiterung des Zahlenbegriffs: imaginäre Zahlen.*)

§ 116. Entstehung und Begriff der imaginären Zahl.

Die allgemeine Form einer rein quadratischen Gleichung ist (§ 104):

$$x^2 + q = 0,$$

in welcher das allgemeine Zahlzeichen q jede positive oder negative Zahl darstellt. Ist nun in besondern Fällen:

$$q = 1, \qquad q = 4,$$

so heißen die Gleichungen:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 4 = 0,$$

woraus sich die Werte:

$$x = \sqrt{-1} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{-4}$$

ergeben. Nun ist aber die Quadratwurzel sowohl aus (-1) als aus (-4) weder eine positive noch eine negative Zahl, indem z. B. $(+1)^2$ und auch $(-1)^2$ die Potenz $+1$, aber niemals (-1) liefert. Denn allgemein hat jede gerade Potenz einer Zahl, mag sie $+$ oder $-$ zum Vorzeichen haben,

*) Es ist eine gewiß zu beachtende, didaktische Forderung, beim mathematischen Unterricht den Schüler nicht eher in das Verständnis von Raumgebilden, Einteilungen, neuen Zahlgrößen u. s. w. einzuführen, bis die Notwendigkeit dazu vorhanden ist. Wir erachten es nicht für didaktisch zulässig, im Schulunterricht die ganze Lehre von den Wurzelgrößen fortlaufend durchzunehmen, fordern vielmehr, die imaginären Zahlen mit den quadratischen Gleichungen zu verknüpfen, da letztere auf jene Zahlen führen.

einen positiven Zahlenwert. In unserer Zahlenreihe von $+\infty$ bis $-\infty$, oder in dem geometrischen Bilde derselben, ist also keine Zahl von der Eigentümlichkeit vorhanden, daß ihr Quadrat eine negative Zahl giebt. Diese neue Art von Zahlen nannte man in früherer Zeit unmögliche Größen, welche Bezeichnung unglücklich gewählt war, da diese Größen ja thatsächlich vorkommen, also nicht unmöglich sind wie etwa ein eckiger Kreis oder ein rundes Dreieck. Die jetzige fast allgemein übliche Bezeichnung imaginäre Zahlen dürfte indes kaum ein Fortschritt sein, weil das Rechnen auf diese Größen führt und die Wurzeln höherer, besonders kubischer Gleichungen oft in imaginärem Gewande erscheinen, während sie in Wirklichkeit reelle Zahlen vorstellen. Die von Gauß für diese neue Zahlart gewählte Benennung laterale (d. h. zur Seite liegende) Zahl ist unstreitig die zutreffendste und inhaltvollste; denn diese hat Sinn und Bedeutung, wie wir alsbald (§ 117) sehen werden. Doch verbleiben wir bei der üblichen Bezeichnung.

Wie wir vorhin sahen, führt die allgemeine Auflösung der quadratischen Gleichung $x^2 + q = 0$ auf Wurzelgrößen von der Form $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, allgemein $\sqrt{-a}$. Die Allgemeinheit der Auflösung dieser Gleichung fordert also notwendig die Einführung solcher Zahlen in die allgemeine Arithmetik. Sollen Quadratwurzeln mit negativem Radikanden einen Sinn haben, so müssen wir den aufgestellten Begriff der Quadratwurzel erweitern und ihn auf diese Zeichen ausdehnen. Wir verstehen unter einer imaginären Zahl eine solche, deren Quadrat negativ ist. In Zeichen:

$$(\sqrt{-a})^2 = -a.$$

Diese Gleichung drückt das Grundgesetz einer imaginären Zahl aus. Die Richtigkeit der Gleichung ergiebt sich aus dem Begriffe der Quadratwurzel. Es bedeuten also die Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$ die Zahlen, deren Quadrate (-1) bezw. (-4) sind. Im weiteren Sinne heißt jede gerade Wurzel aus einer negativen Zahl eine imaginäre Größe. Die allgemeine Form einer imaginären Zahl ist $\sqrt[2n]{-a}$, in welcher

der Radikand ($-a$) jede rationale oder irrationale ganze oder gebrochene Zahl bezeichnet.

Es sei hervorgehoben, daß die Einführung der imaginären Zahlen in die allgemeine Arithmetik ebenso notwendig und berechtigt ist, wie die Einführung der von uns früher betrachteten Zahlformen. Die neuen Zahlen werden denselben Gesetzen unterworfen, welche für die übrigen Wurzeln gültig sind, nur ist beim Operieren mit imaginären Größen das oben aufgestellte Grundgesetz stets zu beachten. Daher nennt man die Größen von der Form $\sqrt{-a}$ der Kürze wegen auch Zahlen. Im Gegensatz zu den imaginären werden die positiven und negativen Zahlen reale Zahlen genannt.

Kommen wir nun auf unsere Gleichung $x^2 + q = 0$ zurück. Aus derselben folgt $x^2 = -q$. Statt $-q$ kann man analog der Gleichung $(\sqrt{-a})^2 = -a$ den Wert $(\sqrt{-q})^2$ setzen. Bringt man $(\sqrt{-q})^2$ auf die linke Seite der Gleichung, so entsteht $x^2 - (\sqrt{-q})^2 = 0$. Zerlegt man die linke Seite in das Produkt zweier Binome, so hat man:

$$(x + \sqrt{-q}) \cdot (x - \sqrt{-q}) = 0;$$

mithin:

$$x_1 = +\sqrt{-q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{-q}.$$

Die vorgelegte Gleichung hat also zwei absolut gleiche, algebraisch entgegengesetzte Werte, deren Quadrat die Zahl $-q$ liefert. Wir sind also genötigt, die Begriffe positiv und negativ auch auf die imaginären Zahlen anzuwenden und sie in positive und negative Größen zu unterscheiden. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ sind also:

$$x_1 = +\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{-1}.$$

Beide Wurzeln sind die Einheiten der imaginären Zahlen und sie werden nach dem Vorgange von Argand mit i (dem Anfangsbuchstaben des Wortes imaginär) bezeichnet, so daß:

$$\pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Jede imaginäre Quadratwurzel $\sqrt{-a}$ läßt sich auf die imaginäre Einheit zurückführen. Man kann

nämlich jede imaginäre Größe in ein Produkt aus einer reellen positiven Zahl und der imaginären Einheit zerlegen. So ist z. B.:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2\sqrt{-1}; \quad \sqrt{-9} = 3i$$

und allgemein: $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = i\sqrt{a}$.

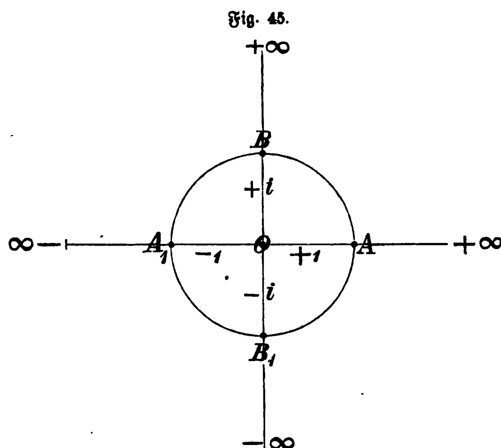
§ 117. Geometrische Versinnlichung der imaginären Zahlen.

Die Raumlehre ist einzig und allein dasjenige Gebiet, welches eine wirkliche Darstellung (Veranschaulichung) der imaginären Zahlen ermöglicht.

1) Um diese Art von Zahlen zu versinnlichen, nehmen wir zunächst die imaginäre Einheit und setzen dieselbe $= x$, also $x = \sqrt{-1}$ oder $x^2 = -1$. Die Zahl x soll also die Eigenschaft haben, daß nach dem Begriffe der imaginären Zahl ihr Quadrat die negative Zahl (-1) liefert. Wir wählen (Fig. 45) eine unbegrenzte Gerade, welche als Versinnlichung aller reellen Zahlen dient.

Setzen wir auf dieser Geraden die Strecke $OA = +1$, so ist der ihr gleiche Abschnitt $OA_1 = -1$. Beschreiben wir

Fig. 45.



nun aus dem Anfangspunkt O mit dem Halbmesser OA den Kreis und ziehen den Durchmesser BB_1 senkrecht auf der

Geraden, so ist nach dem planimetrischen Lehrsatze: Jede senkrechte Halbsehne ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA_1} = (+1) \cdot (-1) = -1,$$

und folglich: $x^2 = \overline{OB}^2$; mithin

$$x = OB = \sqrt{-1} = i.$$

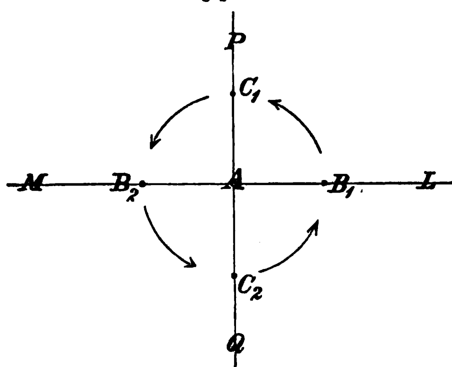
Die Strecke OB veranschaulicht also die positive imaginäre Einheit.

Entsprechend diesem Verfahren können alle imaginären Quadratwurzeln als mittlere geometrische Proportionalen von positiven und negativen Zahlen konstruiert werden. Die imaginären Größen erscheinen dann stets als Strecken einer Geraden, welche im Nullpunkte auf der die reellen Zahlen versinnlichenden Linie senkrecht steht. Aus der Darstellung (Fig. 45) ist auch ersichtlich, daß die reellen und die imaginären Zahlen nur die Null gemeinsam haben. Und wenn wir entsprechend dem Gebrauche bei den reellen Zahlen auch bei den imaginären Größen mit Rücksicht auf den Gegensatz der Lagen von OB und OB_1 die Richtungszeichen $+$ und $-$ wählen und $OB = +i$ setzen, so versinnlicht OB_1 die Zahl $-i$. Es werden daher alle positiven imaginären Zahlen $+\sqrt{-a}$ auf der obern Halbachse und alle negativen Größen dieser Art auf der untern Halbachse liegen. Da also die imaginären Zahlen bei ihrer geometrischen Darstellung als seitlich von der reellen Zahlenreihe liegend erscheinen, so werden sie nach Gauß zutreffend laterale Zahlen genannt.

2) Zum Nachweise einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ gelangt man auch durch Analogie. Wir haben uns das Gebiet der positiven und negativen Zahlen durch eine nach beiden Seiten unbegrenzten Geraden ML versinnlicht. Haben nun zwei Punkte B_1 und B_2 vom Anfangspunkt, der A heißen möge, gleiche Entfernung aber entgegengesetzte Lage, und veranschaulicht der Punkt B_1 etwa die Zahl $+a$, so stellt B_2 die Zahl $-a$ vor. Man geht hier also offenbar von Punkt B_1 zu Punkt B_2 über, mit andern Worten: man überträgt die

Strecke AB_1 aus der Lage (rechts von Null) auf der Richtung AL in die entgegengesetzte Lage (links von Null), auf die Richtung AM, indem man der Zahl $+a$ das entgegengesetzte Zeichen, also — vorsetzt. Die Vorsetzung des Minuszeichens kann aber auch mit vollem Recht als eine Multiplikation mit dem Koeffizienten (-1) aufgefaßt werden, so daß $AB_2 = (-1) \cdot a$ und konsequent dieser Auffassung $AB_1 = (-1) \cdot (-a)$ ist. Die Übertragung der Größe $+a$ in $(-a)$ kann also dadurch bewerkstelligt werden, daß man die erstere mit (-1) multipliziert. Der Faktor (-1) hat also den Charakter, daß er die wechselseitige Beziehung ausdrückt, welche zwischen den Lagen von irgend zwei in gleichem Abstande von A_1, aber in entgegengesetzten Richtungen liegenden Punkten besteht. (Vergleiche § 38, 3.)

Fig. 46.



Zieht man nun durch A die Senkrechte PQ zu ML und trägt auf PQ von A aus die Strecke a nach oben und unten ab, so drängt sich uns die Frage auf, ob man auch einen Faktor finden kann, mit welchem man $AB_1 = a$ multiplizieren muß, um diese Strecke in die Lage AP zu übertragen. Nach der vorliegenden Analogie dürfte es nicht schwer sein, das arithmetische Zeichen zu finden, welches die Drehung der Strecke AB_1 in der Ebene um einen Winkel von 90^0 ausdrückt. Bezeichnen wir den gesuchten Drehungs- oder Richtungsfaktor mit f, so versinnlicht AC_1 bezw. Punkt C_1 die Zahl $f \cdot (+a) = +f \cdot a$. Da nun offenbar die Gerade AM zu AP dieselbe Lage hat wie AP zu AL, so muß man die Zahl für AC_1, nämlich $+f \cdot a$, wiederum mit

f multiplizieren, um die Strecke AC_1 auf AM zu übertragen. Mithin bezeichnet der arithmetische Ausdruck $+f^2 \cdot a$ die Strecke AB_2. Dieselbe Strecke versinnlicht aber nach früheren Darlegungen auch die Zahl $-a$. Daher muß:

$$+f^2 \cdot a = -a \quad \text{und} \quad f = +\sqrt{-1} \qquad \text{sein.}$$

Der gesuchte Faktor heißt also $+\sqrt{-1}$ und die Strecke AC_1 versinnlicht also die Zahl $+f \cdot a = +a \cdot \sqrt{-1}$. Ganz auf dieselbe Weise findet man durch Übertragung der Strecke AB_2 auf die Gerade AQ für AC_2 die Zahl:

$$+f^3 \cdot a = (+\sqrt{-1})^3 \cdot a = [(\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1}] \cdot a =$$
$$= -1 \cdot a \cdot \sqrt{-1} = -a \cdot \sqrt{-1}.$$

Die Strecke AC_2, welche der Lage nach AC_1 entgegengesetzt ist, veranschaulicht also die Zahl $-a \cdot \sqrt{-1}$. Der Gegensatz in den Lagen der Abschnitte AC_1 und AC_2 findet also durch die Vorzeichen $+$ und $-$ vor die Zahlgröße $a \cdot \sqrt{-1}$ sichtbaren Ausdruck. Die Drehung der Strecke AC_2 in der Ebene in demselben Sinne wie vorhin um 90 Winkelgrade wird arithmetisch durch die Zahl $+f^4 \cdot a$ ausgedrückt, so daß man also für die Strecke $AB_1 = +a$ auch noch den diesem gleichen Wert $+f^4 \cdot a$ erhält. Es ist also:

$$(+\sqrt{-1})^4 \cdot a = a.$$

Setzt man a gleich der Längeneinheit, so ist:

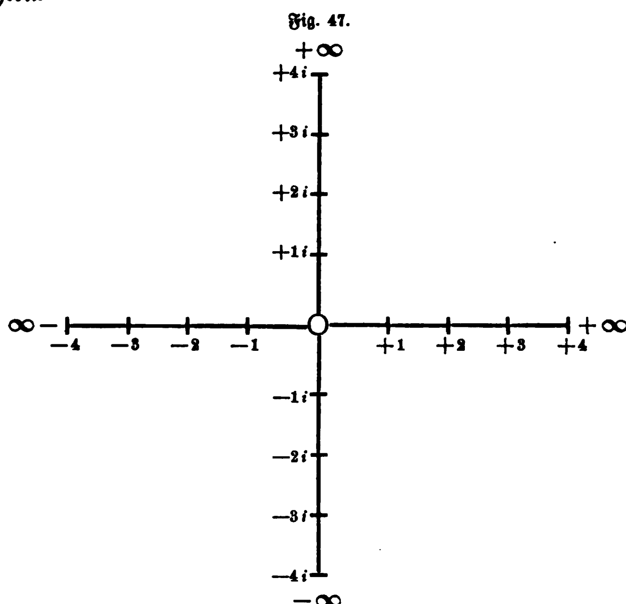
$$AC_1 = +\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad AC_2 = -\sqrt{-1}.$$

d. h. diese Strecken veranschaulichen die lateralen Einheiten.

Die allgemeine Arithmetik beschäftigt sich also mit zwei Zahlenreihen, der reellen und der imaginären. Die letzteren Zahlen werden durch eine Gerade zur Anschauung gebracht, welche im Nullpunkt auf dem Bilde der reellen Zahlenreihe senkrecht steht. Die Gerade, welche die letztere Zahlenreihe versinnlicht, nennt man die Achse der reellen, und die zweite, zur Darstellung der imaginären Zahlen dienende Gerade die Achse der imaginären Zahlenreihe. Die geometrische Dar-

stellung aller bis jetzt betrachteten Zahlformen besteht also aus vier gleichen, nach einer Seite unbegrenzten Teilen, welche den Schnittpunkt O zum Anfangspunkt haben. Jeder Teil heißt eine Halbachse. Zwei Halbachsen veranschaulichen die positiven reellen und die positiven imaginären, und die beiden andern die negativen reellen und imaginären Zahlen. Die folgende Zeichnung enthält die Bilder einiger reellen und imaginären Zahlen.

Fig. 47.



§ 118. Rechnen mit imaginären Zahlen.

Da alle imaginären Zahlen Wurzelgrößen sind, so geschieht das Rechnen mit ersteren nach denselben Gesetzen, die für Wurzeln überhaupt gelten, nur muß stets die Grundgleichung:

$$(\sqrt{-a})^2 = -a$$

befolgt werden.

1) Die Addition und Subtraktion innerhalb der imaginären Zahlenreihe wird gerade so wie mit den reellen

Zahlen vollzogen. Eine imaginäre Zahl zu (von) einer mit ihr gleichartigen bildlich addieren (subtrahieren) heißt, auf der Achse der imaginären Zahlenreihe ebenso verfahren, wie dies für die Addition (Subtraktion) der algebraischen Zahlen (S. 99—107) erläutert worden ist. So ist z. B.:

$$5i \pm 3i = (5 \pm 3)i;$$

allgemein:

$$ai \pm bi = (a \pm b)i.$$

Imaginäre Größen wie $\sqrt{-a}$ bringe man zunächst auf die Form $\sqrt{a} \cdot i$ und behandele die Einheit i in der Rechnung wie einen Buchstabenfaktor, z. B.:

$$\sqrt{-36} + \sqrt{-16} = 6i + 4i = 10i;$$

$$\sqrt{-5} + \sqrt{-3} = i\sqrt{5} + i\sqrt{3} = i(\sqrt{5} + \sqrt{3}).$$

$$\sqrt{-a} \pm \sqrt{-b} = i(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}).$$

(Vergleiche Lehrsatz 6) β § 9.) Die algebraische Addition einer reellen und einer imaginären Zahl führt zu einer neuen Zahlform, der komplexen Zahl, welche in den §§ 119 und 120 behandelt ist.

2) Beim Multiplizieren einer imaginären Zahl ai und einer reellen Zahl b miteinander multipliziere man zuerst a mit b und das erhaltene Produkt ab mit i. So ist z. B.:

$$8 \cdot 3 \cdot i = 24i; \qquad 8 \cdot (-3i) = -24i;$$

$$(-8) \cdot (-3i) = +24i.$$

Im ersten und dritten Beispiele erhalten wir zunächst die Zahl 24 auf der positiven reellen Halbachse, und indem wir diese Zahl mit i multiplizieren, schreiten wir auf die entsprechende Zahl der positiven imaginären Halbachse. Beim zweiten Beispiele gehen wir durch die Multiplikation der Zahl — 24 mit i von der negativen reellen Halbachse auf die entsprechende Zahl der negativen imaginären Halbachse über. Dieser Übergang von einem Achsenteile auf einen andern findet überhaupt statt, wenn eine Zahl mit i multipliziert wird. Eine reelle Zahl mit i multiplizieren heißt also, von

dieser Zahl aus auf die entsprechende Zahl derselben (positiven oder negativen) Halbachse der imaginären Zahlen übergehen. In Zeichen:

$$i \cdot (\pm a) = \pm ai.$$

3) Die Division einer imaginären Zahl von der Form ai durch eine reelle Zahl b geschieht, indem man den Quotienten $\frac{a}{b}$ mit i multipliziert. Es ist also z. B.:

$$20i : 5 = \frac{20}{5} \cdot i = 4i,$$

allgemein:

$$ai : b = \frac{a}{b} \cdot i.$$

4) Was das Multiplizieren einer imaginären Zahl mit einer imaginären und das Potenzieren derselben anlangt, so findet auch hierbei stets ein Übergang von einer Halbachse auf eine andere statt. Diese Wahrheit geht unmittelbar aus den Erläuterungen in § 117, 2) hervor. Wir fanden für den Übergang von $+1$ (auf dem positiven reellen Achsenteile) auf die absolut gleiche Strecke AC_1 auf der Senkrechten AP das Zeichen $+\sqrt{-1} = i$ als Drehungsfaktor. Die Übertragung der Strecke AC_1 in die Lage AB_2 wird durch denselben Faktor bezeichnet, und wir erhalten somit als Ergebnis dieser Drehung den Ausdruck $(\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1})$, welcher dem ursprünglichen Werte für $AB_2 = -1$ gleich ist. Es muß also $(\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1$ sein, welche Gleichung ja auch nach dem Begriffe der imaginären Zahl richtig ist.

Für den Übergang der Strecke AB_2 von der negativen reellen Halbachse auf die negative imaginäre gilt dasselbe Zeichen, und wir erhielten für den Abschnitt AC_2 die Zahl $-\sqrt{-1}$. Folglich muß:

$$(+\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1}) = i^3 = -\sqrt{-1}$$

sein. Indem wir ferner den Abschnitt $AC_2 = -\sqrt{-1}$ von der imaginären Halbachse in die Lage AB_1 auf dem positiven reellen Teile versetzten, erhielten wir für letztere Strecke den arithmetischen Ausdruck:

$$(+\sqrt{-1})^4 = i^4 = +1$$

oder $\qquad -i \cdot i = -i^2 = -(\sqrt{-1})^2 = +1.$

Setzen wir diese Übertragungen in demselben Sinne fort, so erhalten wir:

$$(+\sqrt{-1})^5 = i^5 = +\sqrt{-1}; \quad (+\sqrt{-1})^6 = i^6 = -1;$$
$$(+\sqrt{-1})^7 = i^7 = -\sqrt{-1}; \quad (+\sqrt{-1})^8 = i^8 = +1.$$

Wie nun der Übergang oder die Versetzung einer Zahl irgend einer Halbachse auf die folgende arithmetisch stets durch Multiplikation dieser Zahl mit dem Faktor i bezeichnet wird, so muß umgekehrt diese Rechenoperation stets mit einem Fortschreiten von einem Achsenteile auf einen andern verbunden sein. Bei der Multiplikation zweier imaginärer Zahlen miteinander, z. B. $4i \cdot 5i$, multipliziere man zuerst mit dem reellen Faktor des Multiplikators, also mit 4, das giebt $20i$. Dieses Ergebnis ist noch mit i zu multiplizieren. Bei der Deutung eines Produktes aus zwei imaginären Faktoren handelt es sich also um die Frage: wie ist die Multiplikation einer **imaginären** Zahl $\pm ai$ mit i aufzufassen? mit anderen Worten: welcher Übergang von der imaginären Zahlenachse findet statt, wenn wir irgend eine Zahl derselben mit dem Faktor i multiplizieren? Wir multiplizierten vorhin die Zahl $+\sqrt{-1}$, welche auf der positiven, imaginären Halbachse liegt, mit $\sqrt{-1} = i$ und erhielten (-1), welches Ergebnis dieselbe Strecke auf der negativen, reellen Halbachse bezeichnet. Die Zahl $-\sqrt{-1}$ auf dem negativen, imaginären Achsenteile multiplizierten wir mit i und das Ergebnis war $+1$, also eine Zahl der positiven, reellen Halbachse. Der Drehungs- oder Richtungsfaktor i hat also den Charakter, daß er irgend eine imaginäre Zahl $\pm ai$, bezw. ihre sie versinnlichende Strecke, auf diejenige reelle Halbachse versetzt, welche das entgegengesetzte arithmetische Vorzeichen trägt.

Definition: Mit i an einer imaginären Zahl die Multiplikation vollziehen heißt, dieselbe von ihrem

Achsenteile auf die Halbachse der algebraisch entgegengesetzten reellen Zahlenreihe übertragen.

Es ist daher:

$$i \cdot 20i = -20,$$

in allgemeinen Zeichen:

$$i \cdot (\pm ai) = \mp a.$$

Durch vorstehende Erklärung gestalten sich die Multiplikationen imaginärer Zahlen mit imaginären Zahlen und die Potenzierung dieser Zahlformen zu anschaulichen und darum leichten Operationen. Der Anfänger spreche sich über die Lösung einiger Aufgaben, z. B. von:

$$8i \cdot (-4i),$$

etwa folgendermaßen aus: Die Zahl $(-4i)$ liegt auf der negativen imaginären Halbachse; $(-4i)$ mit 8 multipliziert liefert die Zahl $(-32i)$ auf demselben Achsenteile. Wenn ich $(-32i)$ mit i multipliziere, so erhalte ich die entsprechende Zahl auf der positiven, reellen Halbachse, nämlich $(+32)$. Mithin ist:

$$8i \cdot (-4i) = +32.$$

Das Multiplizieren einer imaginären Zahl mit einer imaginären und die Potenzierung dieser Zahlformen kann auch durch folgende Darlegung zur Anschauung gebracht werden. Die Zahl $+\sqrt{-1}$ liegt auf der positiven imaginären Halbachse AP (Fig. 46, Seite 408), deren Richtung um einen rechten Winkel, bezw. einen Kreisquadranten von der positiven reellen Halbachse AL entfernt ist. Das Quadrat dieser Zahl, nämlich $(+\sqrt{-1})^2 = -1$ befindet sich auf der negativen reellen Halbachse AM, deren Entfernung von AL zwei Quadranten beträgt. Die dritte Potenz von $+\sqrt{-1}$ liefert die Zahl $-\sqrt{-1}$, welche der negativen imaginären Halbachse angehört und diese weicht um eine Drehung von drei Quadranten von AP ab. Der Potenzwert von $(+\sqrt{-1})^4$ giebt die Zahl $(+1)$, welche um eine volle Umdrehung, also vier Quadranten von der positiven reellen Halbachse entfernt ist, d. h. auf derselben liegt. Die Zahl $-\sqrt{-1}$ gehört dem Achsenteile an, dessen Richtung um drei Quadranten von AP entfernt ist. Die zweite Potenz von $-\sqrt{-1}$, nämlich -1 liegt auf AM, welche $2 \cdot 3 = 6$ Quadranten, ihr Kubus

$+\sqrt{-1}$ befindet sich auf der Halbachse AP, welche $3 \cdot 3 = 9$ Quadranten von der positiven reellen Halbachse entfernt ist. Hieraus folgt: Die Potenzierung der imaginären Zahlen ist gleichbedeutend mit der Multiplikation des Drehungsabstandes der sie versinnlichenden Strecke von der positiven reellen Halbachse. Diese Wahrheit gilt übrigens auch für das Potenzieren reeller Zahlen. Die die Zahl (-1) versinnlichende Strecke ist um 2 Quadranten, ihr Quadrat um $2 \cdot 2 = 4$ Quadranten und ihr Kubus (-1) um $3 \cdot 2 = 6$ Quadranten von der positiven reellen Halbachse AL entfernt.

Vorstehende Wahrheit ist deshalb wichtig, weil uns durch sie ein Hilfsmittel geboten ist, die Potenzierung und die Multiplikation imaginärer Zahlen mit imaginären zu versinnlichen. Dem Lernenden ist es zu empfehlen, mit Hilfe des Zahlenbildes (Fig. 47) sich über einzelne Aufgaben dieser Art ausführlich auszusprechen.

Die Gleichung:

$$i \cdot (\pm ai) = (\mp a)$$

gilt auch, wenn die negativen Radikanden irrational sind, also die Form $\pm\sqrt{-a}$ haben. Es ist z. B.:

$$(+\sqrt{-8}) \cdot (-\sqrt{-2}) = (+i \cdot \sqrt{8}) \cdot (-i\sqrt{2}) =$$
$$= i \cdot (-i \cdot \sqrt{16}).$$

Die Zahl $(-i \cdot \sqrt{16}) = -4i$ ist mit i zu multiplizieren und verwandelt sich durch diese Operation in die entsprechende Zahl der positiven reellen Zahlenreihe, nämlich in $+4$. Allgemein ist:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & (+\sqrt{-a}) \cdot (+\sqrt{-b}) = (+i\sqrt{a}) \cdot (+i\sqrt{b}) = -\sqrt{ab}. \\ 2) & (-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = (-i\sqrt{a}) \cdot (-i\sqrt{b}) = -\sqrt{ab}. \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{ll} 3) & (+\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = (+i\sqrt{a}) \cdot (-i\sqrt{b}) = +\sqrt{ab}. \\ 4) & (-\sqrt{-a}) \cdot (+\sqrt{-b}) = (-i\sqrt{a}) \cdot (+i\sqrt{b}) = +\sqrt{ab}. \end{array}\right\}$$

Vorstehende vier Formeln kann man in die beiden folgenden, in welchen nur die obern und die untern Vorzeichen zugleich gelten, zusammenfassen:

$$\text{I)}\quad (\pm\sqrt{-a})\cdot(\pm\sqrt{-b}) = -\sqrt{ab}.$$

$$\text{II)}\quad (\pm\sqrt{-a})\cdot(\mp\sqrt{-b}) = +\sqrt{ab}.$$

Diese Gleichungen sprechen zwei Lehrsätze aus, nämlich:

1) **Lehrsatz:** Das Produkt zweier gleichartigen imaginären Wurzeln ist negativ reell.

2) **Lehrsatz:** Das Produkt zweier imaginären Wurzelgrößen mit entgegengesetzten Vorzeichen ist positiv reell.

5) Beim praktischen Rechnen und zwar beim Multiplizieren und Potenzieren, welches ein Multiplizieren von gleichen Faktoren ist, bestimmen die unter 4) (erster Absatz) durch Veranschaulichung abgeleiteten Potenzwerte der imaginären Einheit i den Sinn des Produktes. Diese Potenzwerte sind daher wohl zu merken, und wir stellen sie deshalb hier übersichtlich zusammen. Die Aufstellung zeigt zugleich die Entwickelung der Potenzwerte auf rein arithmetischem Wege auf Grundlage der Grundgleichung:

$$(\sqrt{-a})^2 = -a.$$

$$i = +\sqrt{-1}.$$
$$i^2 = (+\sqrt{-1})^2 = -1.$$
$$i^3 = i^2\cdot i = -i = -\sqrt{-1}.$$
$$i^4 = i^2\cdot i^2 = (-1)^2 = +1.$$
$$i^5 = i^4\cdot i = (+1)\cdot i = +\sqrt{-1}.$$
$$i^6 = i^4\cdot i^2 = (+1)\cdot(-1) = -1.$$

Man ersieht aus dieser Reihe, daß für die Potenzen von i^5 bis i^8 sich die Ergebnisse der vier ersten Potenzen wiederholen. Diese Wahrheit haben wir auch bereits unter 4) Seite 413 ersehen.

Bezeichnet man allgemein alle ganzen positiven Potenzexponenten, Null nicht ausgenommen, mit n, so ist:

$$i^{4n} = +1;\qquad i^{4n+1} = +i;$$
$$i^{4n+2} = -1;\qquad i^{4n+3} = -i;$$
$$i^{4n+4} = +1;\qquad i^{4n+5} = +i$$

Hieraus ergeben sich folgende Lehrsätze:

1) **Lehrsatz:** Jede gerade Potenz von i hat reellen Wert; derselbe ist $(+1)$ oder (-1), je nachdem der Exponent durch 4 teilbar oder nicht teilbar ist.

2) **Lehrsatz:** Jede ungerade Potenz von i ist imaginär und zwar $(+i)$ oder $(-i)$, je nachdem der Exponent um 1 größer oder um 1 kleiner als eine durch 4 teilbare Zahl ist.

6) Beim Multiplizieren einer reellen Zahl mit i wird erstere nach 2) Seite 411 von der Halbachse der reellen Zahlenreihe auf die Halbachse der imaginären Zahlenreihe mit demselben Vorzeichen übertragen, $i \cdot (\pm a) = \pm ai$. Daher wird bei der Division, der inversen Rechnungsart, der umgekehrte Fortschritt stattfinden, d. h. eine imaginäre Zahl $\pm ai$ wird durch i dividiert, indem man von dem den Dividenden versinnlichenden Punkt der imaginären Achse auf den entsprechenden Punkt der reellen Achse übergeht. Es ist z. B.:

$$\pm 24i : i = \pm 24;$$

in allgemeinen Zeichen:

$$\frac{\pm ai}{i} = \pm a.$$

Da ferner nach 4)

$$i \cdot (\pm ai) = \mp a$$

ist, so muß umgekehrt:

$$\frac{\pm a}{i} = \mp ai \qquad \text{sein.}$$

Beispiele:

$$\frac{+1}{i} = -i; \qquad \frac{-4}{i} = +4i.$$

Die folgenden Formeln sind nach den vorangegangenen Erörterungen leicht zu entwickeln. Bei der rein arithmetischen Behandlung der Divisions-Aufgaben behandele man ebenfalls die imaginäre Einheit i als eine Buchstabengröße.

Arten der Aufgaben. Man hat bei der Division folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Dividend und Divisor sind imaginär; dann ist der Quotient positiv reell.

Formel: $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{i\sqrt{a}}{i\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

2) Der Dividend ist imaginär, der Divisor dagegen reell; dann ist der Quotient positiv imaginär.

Formel: $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} = \frac{i\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = i\sqrt{\frac{a}{b}}$.

3) Der Dividend ist reell, der Divisor imaginär; dann ist der Quotient negativ imaginär.

Formel: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}}{i\sqrt{b}} = \frac{1}{i} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = -i \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Die komplexe Zahl.

§ 119. Entstehung, Begriff und Versinnlichung der komplexen Zahl.

1) Entstehung und Begriff. Wenn wir die gemischte quadratische Gleichung:

$$x^2 - 6x + 45 = 0$$

auflösen, so erhalten wir:

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - 45} = 3 \pm \sqrt{-36} = 3 \pm 6i.$$

Die Auflösung der Gleichung:

$$x^2 - 2px + q = 0$$

liefert die Werte:

$$x = p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Ist in der Wurzelgröße $\sqrt{p^2 - q}$ (der Diskriminante, § 105, 3) die Zahl q größer als p^2 wie in vorstehendem bestimmten Beispiele, so hat die Differenz $p^2 - q$ einen negativen Wert, und alsdann ist der Wurzelausdruck imaginär. Bezeichnen wir den negativen Radikanden mit $(-b^2)$ und setzen $p = a$, so ist:

$$x = a \pm b\sqrt{-1} = a \pm bi.$$

Die Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichung führt also auf eine neue Art von Zahlen, von der Form $a \pm bi$, in welcher a und b beliebige positive und negative reelle Zahlen oder Null bezeichnen. Da b auch negativ sein kann, so sind beide Formen in der einen $a + bi$ enthalten. Diese gewonnene neue Zahlform heißt nach Gauß eine komplexe Zahl, a ist ihr reelles, bi ihr imaginäres Glied. Die Form $a + bi$ nennt man die Normalform der komplexen Zahl. Sind zwei komplexe Zahlen einander gleich, ist z. B. $a + bi = p + qi$, so besteht Gleichheit zwischen ihren reellen Gliedern, $a = p$, und Gleichheit zwischen den imaginären Teilen, es ist auch $bi = qi$. Denn aus der Gleichung:

$$a + bi = p + qi \quad \text{folgt} \quad a - p = i(q - b).$$

Diese Gleichung kann nur unter der Bedingung als richtig bestehen, wenn sowohl $a - p$ als auch $q - b$ gleich Null ist. Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Gliedes unterscheiden, also Zahlen von der Form $a + bi$ und $a - bi$ werden in Beziehung zu einander konjugierte*) komplexe Zahlen genannt.

2) Geometrische Versinnlichung der komplexen Zahlen. Wie die imaginären Zahlen, so können auch die komplexen durch geometrische Darstellungen zur Anschauung gebracht werden.

Begriff der geometrischen Addition.**) Ursprünglich haben wir zur Versinnlichung der natürlichen Zahlen die Strecken nur hinsichtlich der Länge betrachtet. Um die relativen Zahlen zur Anschauung zu bringen, benutzten wir nicht bloß die Größe der Strecken, sondern auch den Gegensatz ihrer Lagen. Zur geometrischen Versinnlichung der komplexen Zahlen tritt zu jenen Eigenschaften der Geraden noch die Richtung hinzu. Länge und Richtung der Strecke bilden die Stücke zum Begriff der „geometrischen Addition", welche eine einfache geometrische Ver-

*) Diese Bezeichnung rührt von Cauchy (1821) her.

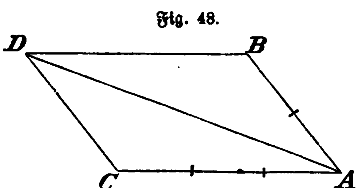
**) Die Einführung in diesen Begriff ist zwar zum Verständnisse des über die Versinnlichung Gesagten nicht notwendig, trägt aber zum tieferen Erfassen des Folgenden wesentlich bei.

sinnlichung der komplexen Zahlen und ihrer algebraischen Addition ermöglicht. Als **Grundgesetz** für die geometrische Addition gilt:

Zwei Strecken von gleicher absoluter Länge und derselben Richtung sind als Zahlen aufgefaßt gleich, so daß die eine Strecke für die andere gesetzt werden kann.

Die geometrische Addition hat eine vollkommene Analogie in der Mechanik, und zwar im Newton'schen „Parallelogramm der Kräfte". Da bei der sinnlichen Darstellung von Kräften nicht bloß die Intensität, sondern auch die Richtung derselben inbetracht kommt, so ist die Strecke vermöge ihrer Eigenschaften Länge und Richtung ein sehr zweckmäßiges Bild für eine mechanische Kraft. Wirken zwei mechanische Kräfte, die Seitenkräfte AB und AC, mit den Intensitäten 2 und 3 unter einem Winkel α auf einen Punkt A (Fig. 48), so ist die Diagonale AD des (aus den gegebenen Stücken gebildeten) Parallelogramms $ABDC$ die Mittelkraft oder Resultante, gleich der Summe der Seitenkräfte*), d. h. es ist:

Fig. 48.



$$AB + AC = AB + BD = AC + CD = AD.$$

Genau so verhält es sich mit der geometrischen Addition von Strecken verschiedener Richtung. Man nennt in der Geometrie die geradlinige Entfernung der Endpunkte A und D, also die Strecke AD, die Summe der Strecken AC und CD, und setzt:

$$AC\,(+)\,CD = AD.$$

Dieser Festsetzung zufolge betrachtet man in einem Dreieck ABC die Seite AC als die Summe der andern Seiten und schreibt:

$$AB\,(+)\,BC = AC.$$

Diese Gleichung erscheint allerdings als eine Ungereimtheit, wenn man nur die absoluten Längen der Strecken, bezw. ihre absoluten Zahlenwerte im Auge hat, da nach Euklid („Elemente", I, 20. Satz):

$$AB + BC > AC$$

ist. Die Auffassung der Strecke AC als Summe von AB und BC ist

---

*) Möbius hat dieses Verfahren, zwei Kräfte mittels des Kräfteparallelogramms zu ihrer Resultante zu summieren, in seiner „Statik" zuerst als rein geometrischen Begriff aufgestellt. Zur Versinnlichung der Rechenoperationen mit komplexen Zahlen wurde die geometrische Addition zuerst von Argand eingeführt und von Gauß weiter ausgebildet, dagegen zuerst von Matzka (1851), Riecke (1856) und Durège (1859) vollständig durchgeführt und einwurfsfrei begründet.

aber vollkommen berechtigt, sobald auch die **Richtung** inbetracht kommt, indem man von A aus in der Richtung AC ebenso an den Punkt C gelangt wie über die gebrochene Linie ABC. Obige Gleichung hat dieselbe Berechtigung, mit welcher in der allgemeinen Arithmetik das Ergebnis einer Verbindung aus **relativen** Zahlen von der Form:

$$(+a) + (-b), \quad \text{also} \quad a - b \ (\text{cond.}\ a > b)$$

als **Summe** bezeichnet wird (§ 35, letzter Absatz). Zur Verhütung von Mißverständnissen nennt man die Summe von Strecken, bei welcher nicht bloß die **Länge**, sondern auch die **Richtung** derselben in Rechnung gebracht wird, die **Richtungssumme**, während die Summe der absoluten Längen die **absolute Summe** heißt. Um die Gleichungen der Richtungssumme und der absoluten Summe zweier Strecken sofort deutlich unterscheiden zu können, erscheint es sehr zweckmäßig, nach **Günthers** Vorschlag in ersteren das allgemeine „Plus" durch ein besonderes Zeichen (+) kenntlich zu machen und zu schreiben (Fig. 49):

Fig. 49.

$$AD_1 = AB + BC; \qquad AC = AB\,(+)\,BC.$$

Sollen obiger Erklärung zufolge die Strecken AB und CD (Fig. 50) im geometrischen Sinne addiert werden, so ziehe man: $BE \mathrel{\#} CD$ und

Fig. 50.

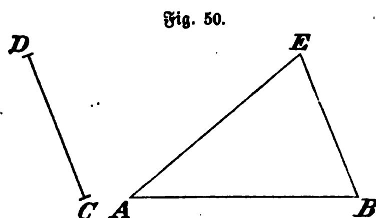
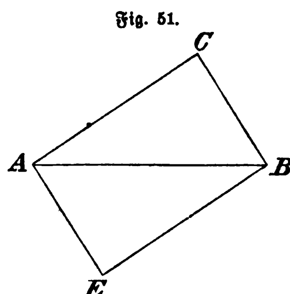


Fig. 51.



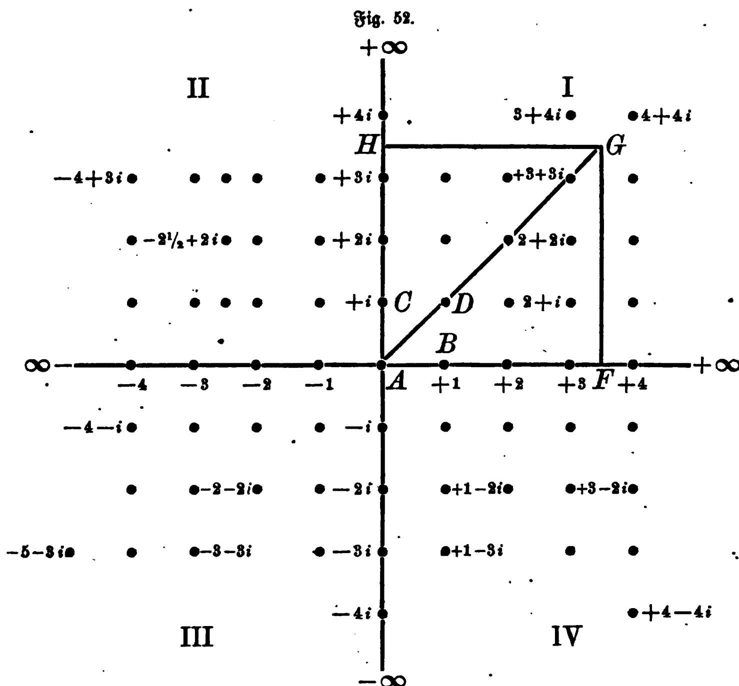
hierauf AE, welche Strecke die gesuchte Richtungssumme bezeichnet. Man schreitet also hier wie in § 35 zuerst von A nach B und hierauf in gleicher Richtung mit CD bis E, so daß also A der Anfang und E das Ende der Richtungssumme der gegebenen Strecken bezeichnet. Umgekehrt kann man eine Strecke AB auf sehr mannigfaltige Weise durch einen gleichwertigen gebrochenen Linienzug ersetzen. Der wichtigste Fall dieser Zerlegung in Strecken verschiedener Richtungen kommt dann vor, wenn man einen beliebigen Punkt eines Feldes der **Gaußischen** Zahlenebene (Fig. 52) z. B. G mit A verbindet und von G die Senkrechte auf die reelle Zahlen-

achse fällt. Dann ist $AG = AF\,(+)\,FG$. — Bei der **geometrischen Subtraktion** befolgt man dasselbe Verfahren, durch welches die Zerlegung einer gegebenen Kraft nach dem Parallelogramm-Prinzip vollzogen wird. Um z. B. die Strecke AC von AB geometrisch zu subtrahieren (Fig. 51, Seite 421), betrachte man AB als **Diagonale**, AC als **Seite** eines Parallelogramms; zieht man $BE \# AC$, so ist die Strecke AE die gesuchte Differenz. Man erhält auch die **Differenz**, wenn man die Richtung von AC **umkehrt und addiert**: $AB - AC = AB + CA$
$= AB + BE = AE$.

Gaußische Zahlenebene.

Angenommen, es sei die Zahl $1 + i$ zu versinnlichen. Wir zeichnen uns ein Bild der reellen und der imaginären Zahlenreihe (Fig. 52). Das erste Glied der geometrisch dar-

Fig. 52.



zustellenden Zahl nämlich $+1$ wird durch Punkt B auf der reellen positiven Halbachse veranschaulicht. Da das zweite

Glied $+i$ positiv imaginären Charakters ist, so müssen wir die reelle Achse verlassen und auf der Achse der positiven lateralen Zahlen um eine Längeneinheit fortschreiten. Errichtet man in den Punkten B und C die Senkrechten auf den zugehörigen Achsen, so schneiden sich diese Rechtwinkeligen in D. Da nun $BD = AC$ ist, so erfüllt Punkt D die Eigenschaft, daß sein Abstand von der imaginären Achse, nämlich AB die Zahl $+1$ und seine Entfernung von der reellen Achse, also BD die Zahl i veranschaulicht. Mithin ist die gebrochene Linie ABD, bezw. die Richtungssumme AD oder Punkt D das Bild der Zahl $1+i$.

Um allgemein die komplexe Zahl $a+bi$ zu konstruieren, sucht man diejenigen Punkte auf den Achsen, welche den Zahlen a und bi entsprechen, und errichtet in diesen Punkten die Senkrechten, der Schnittpunkt derselben ist der gesuchte Punkt. Ist a positiv und b negativ, so liegt der die Zahl versinnlichende Punkt im vierten, wenn a dagegen negativ und b positiv ist, so befindet sich der Punkt im zweiten Quadranten (Felde). Hieraus ergiebt sich, daß die komplexen Zahlen durch Punkte der durch die reelle Achse und die imaginäre Achse bestimmten Ebene zur Anschauung gebracht werden. Und da die Senkrechten auf den beiden Achsen sich nur in einem Punkte schneiden können, so ist die Lage des die komplexe Zahl veranschaulichenden Punktes in der Ebene genau bestimmt. Also entspricht irgend einer reellen, imaginären oder komplexen Zahl ein bestimmter Punkt der Ebene und umgekehrt, ein bestimmter Punkt der Ebene versinnlicht nur eine bestimmte Zahl. Rückt Punkt G (Fig. 52) in A, so wird $a+bi=0$, weil a und b den Wert Null erhalten. Als anschauliches Bild aller in der allgemeinen Arithmetik vorkommenden Zahlgrößen kann mithin die durch ein rechtwinkeliges Koordinatensystem gelegte Ebene dienen, welche nach ihrem Ersinner Gauß die Gaußische Zahlenebene genannt wird. Die Bildpunkte aller Zahlen von der Form $a \pm 2i$ liegen in der Geraden, welche durch den Punkt $2i$ bezw. $-2i$ parallel zur reellen Achse gezogen ist. Alle Zahlen von der Form $1 \pm bi$ werden durch Punkte

einer Geraden versinnlicht, die im Abstande $+1$ mit der imaginären Zahlenachse parallel läuft. Der Abstand der Bilder der Zahlen $5+3i$, $5-3i$, $-5+3i$, $-5-3i$ vom Nullpunkte, d. h. die absolute Länge, welche diesen Zahlen entspricht, ist dieselbe, wie weiter unten gezeigt wird. Die Strecken, welche die Zahlen $1+i$, $2+2i$, allgemein $a\cdot(1+i)$ zur Anschauung bringen, bilden einen unter einem rechten Winkel gebrochenen Linienzug, dessen zwei Teile gleich lang sind. Die Richtungssumme ist bei jeder komplexen Zahl die Hypotenuse des entsprechenden Dreiecks. Verbindet man die Bildpunkte der Zahlen 0, $+1$, $+i$, $1+i$, allgemein der Zahlen 0, $+a$, $+ai$, $a(1+i)$ durch Geraden, so entstehen Quadrate. Die Verbindung der Punkte, welche den Zahlen 0, $+a$, $+bi$, $a+bi$ entsprechen, liefert Rechtecke.

Man merke noch den absoluten Zahlenwert für die Strecke AG (die Richtungssumme), welche den direkten Abstand des die komplexe Zahl $a+bi$ versinnlichenden Punktes G vom Anfangspunkt A angiebt. Da die Länge $AF=a$ und $FG=b$ ist, so ist nach dem Lehrsatze des Pythagoras:

$$AG=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Man nennt den Ausdruck a^2+b^2 die Norm und die positive Wurzel aus demselben, also $+\sqrt{a^2+b^2}$, den Modul*) der komplexen Zahl $a+bi$. So ist z. B. die Norm der Zahlen $3+4i$, $3-4i$, $-3+4i$, $-3-4i$ gleich $3^2+4^2=25$ und ihr Modul gleich 5. Der absolute Wert des Ausdrucks $\sqrt{a^2+b^2}$ wird von Weierstraß „absoluter Betrag" der komplexen Zahl $a+bi$ genannt und nach ihm kurz mit $|a|$ bezeichnet. Der von Weierstraß vorgeschlagene Name ist der Argandschen Bezeichnung „Modul" vorzuziehen.

Die komplexe Zahl wird nicht bloß in der (ursprünglichen) Form $a+bi$, sondern auch häufig in einer anderen dargestellt. Zu dieser zweiten Bezeichnung gelangt man durch ein anderes Verfahren, die Lage eines Punktes in der Ebene zu bestimmen. Man sucht den Abstand des Punktes G

*) Bezeichnung von Argand (1814).

vom Nullpunkt, den Modul, und den Winkel α, welchen die Strecke AG mit der positiven reellen Halbachse bildet. Nach trigonometrischen Begriffen ist im rechtwinkeligen Dreieck AFG, wenn wir die absoluten Zahlenwerte a und b für die Strecken AF und FG festhalten und $AG = r$ setzen:

$$\frac{a}{r} = \cos\alpha \text{ und } \frac{b}{r} = \sin\alpha, \text{ oder } \frac{bi}{r} = i\sin\alpha;$$

folglich:

$$a = r\cdot\cos\alpha, \qquad bi = r\cdot i\sin\alpha.$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen ergiebt sich:

$$a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Diese Form der komplexen Zahl heißt die **kanonische**, und wenn $r = 1$ gesetzt wird, die **reduzierte** Form. Der Winkel α wird die **Amplitude***) der komplexen Zahl $a + bi$ genannt, $r = +\sqrt{a^2 + b^2}$ ist der Modul. Die Zahl $3 + 4i$ hat also zur Amplitude einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente $\frac{4}{3}$ ist, und mithin beträgt die Größe des Winkels α für diese Zahl $53^0\ 7'\ 48''$. Durch diesen **Winkel** und den **Modul** der Zahl $3 + 4i$ nämlich $+\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ist die Lage des dieselbe veranschaulichenden Punktes in der Zahlenebene genau bestimmt. Diese Darstellung eines Punktes der Gaußischen Zahlenebene ist die nämliche, welche in der analytischen Geometrie mittels Polarkoordinaten gegeben wird. Die Größen r und α heißen die Polarkoordinaten von G, r ist der radius vector, α das Argument.

§ 120. Rechnen mit komplexen Zahlen.

Die allgemeine Auflösung der gemischten quadratischen Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0$$

machte die Einführung der komplexen Zahl in die allgemeine

*) Die Benennungen „Amplitude" und „reduzierte Form" rühren von Cauchy (1821) her. Der Name „Norm" ist von Gauß (1831) in die Arithmetik eingeführt worden.

Arithmetik notwendig. Da diese neue Zahlform eine Verbindung einer reellen und einer imaginären Zahl ist, so müssen wir den Begriff der Summe dahin erweitern, daß sie auch ungleichartige, wesentlich verschiedene Zahlen zusammenfassen kann. Unter der komplexen Zahl $a + bi$ ist diejenige Zahl zu verstehen, welche so viele reellen Einheiten enthält, als die reelle Zahl a angiebt, und so viele imaginäre Einheiten, als bi angiebt.

1) **Was die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen anlangt**, so werden diese Operationen nach denselben Gesetzen vollzogen, welche für Summen und Differenzen reeller Zahlen bestehen. Es ist z. B.:

$$(8 + 4i) + (7 + 5i) = (8 + 7) + i(4 + 5) = 15 + 9i.$$

In allgemeinen Zeichen:

$$(a + bi) \pm (p + qi) = (a \pm p) + (b \pm q)i.$$

Das Ergebnis dieser beiden Rechnungsarten ist also im allgemeinen gleichfalls eine komplexe Zahl. Da wir über den Wert, die Bedeutung des Resultates der Rechnung mit komplexen Zahlen nur dann ein sicheres, klares Urteil gewinnen, wenn ersteres die Form $a + bi$ hat, so suche man das Ergebnis stets auf diese Normalform zu bringen. Die Summe zweier konjugierten Zahlen ist reell, nämlich das Doppelte des reellen Gliedes, ihre Differenz dagegen ist imaginär und zwar dem doppelten imaginären Teile gleich. In Zeichen:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a; \quad (a + bi) - (a - bi) = 2 \cdot bi.$$

Zur Veranschaulichung der Addition und Subtraktion mit komplexen Zahlen verfahre man auf folgende Weise: Heißen die zu addierenden komplexen Zahlen $k_1 = a + bi$ und $k_2 = p + qi$, so stelle man dieselben geometrisch dar. Es sei

$$OA_1 = a, \qquad A_1B_1 = bi,$$
$$OA_2 = p \quad \text{und} \quad A_2B_2 = qi,$$

so versinnlicht der Punkt B_1 die erste und Punkt B_2 die zweite komplexe Zahl. Trägt man nun von O aus auf OR die Strecke

$OA_3 = a + p$ ab, errichtet in A_3 auf OR die Senkrechte und macht dieselbe gleich der Summe $A_1B_1 + A_2B_2$, so versinnlicht OB_3 bezw. Punkt B_3 das Ergebnis der Addition obiger komplexer Zahlen. Denselben Punkt B_3 erhält man auch, indem man die Punkte B_1 und B_2 mit O verbindet und dieses Gebilde durch Ziehen von Parallelen, nämlich $B_1B_3 \parallel OB_2$ und $B_2B_3 \parallel OB_1$, zu einem Parallelogramm ergänzt.

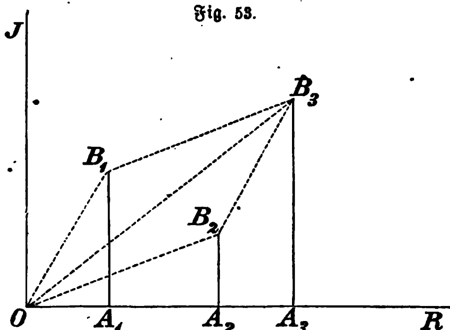


Fig. 53.

Soll etwa die komplexe Zahl k_2 von einer andern k_3 subtrahiert werden, und wäre k_3 etwa durch Punkt B_3 und k_2 durch Punkt B_2 versinnlicht, so verbinde man die Punkte B_3 und B_2 mit O, betrachte OB_3 als Diagonale, OB_2 als Seite eines Parallelogramms. Durch Konstruktion desselben findet man Punkt B_1, der durch seine Lage in der Ebene die Differenz der genannten komplexen Zahlen veranschaulicht.

2) Beim Multiplizieren komplexer Zahlen mit komplexen führe man statt $\pm\sqrt{-1}$ das Zeichen $\pm i$ ein, behandele dieses wie einen Buchstabenfaktor und setze schließlich für die Potenzen von i die Seite 416 angegebenen Potenzwerte. Das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen ist positiv reell und liefert ihre „Norm".

In Zeichen:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 .$$

3) Kommen Quotienten oder Brüche vor, deren Nenner eine komplexe Zahl ist, so ist es Hauptsache, mittels Anwendung vorstehender Formel jede imaginäre Wurzel im Nenner zu beseitigen.

Beispiel:

$$\frac{6}{3 - \sqrt{-3}} = \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{-3})}{9 + 3} = \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{-3}) .$$

Der Quotient zweier komplexen Zahlen ist stets eine komplexe Zahl. Auch in dem Falle, daß Dividend und Divisor konjugiert sind, liefert das Ergebnis der Division eine komplexe Zahl; denn:

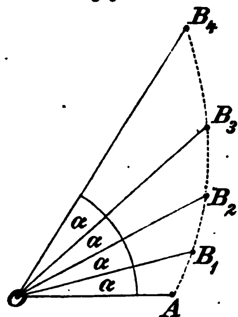
$$\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2-i\cdot 2ab}{a^2+b^2}$$
$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-i\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

4) Erheben wir die komplexe Zahl $1+i$ ins Quadrat, so erhalten wir:

$$(1+i)^2 = 1^2+i^2+2i = +2i.$$

Wie die Gaußische Zahlenebene (Fig. 52) zeigt, liegt die Zahl $1+i$ auf der Richtung (radius vector) AG, welche mit der positiven Halbachse AF den Winkel $\alpha = 45^0$ bildet. Das Quadrat der Zahl $1+i$, nämlich $+2i$, gehört im Zahlenbilde der Halbachse AH an; ersteres liegt also auf einer Richtung, die mit der positiven reellen Halbachse einen doppelt so großen Winkel bildet als AG. Überhaupt liegen die Quadrate aller Zahlen, welche durch Punkte der Richtung AG veranschaulicht werden, auf der Achse AH. Beim Potenzieren komplexer Zahlen findet also eine ähnliche Bewegung in der Zahlenebene wie bei der Potenzierung imaginärer Zahlen § 118, 4) statt. Die Potenzierung komplexer Zahlen ist mit Multiplikation des Drehungsabstandes*) ihrer Richtung (radius vector) von der positiven Halbachse AF gleichbedeutend. Wenn (Fig. 54) $OA = 1$ gesetzt wird, und Punkt B_1 die Zahl $a+bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ versinnlicht, so stellen die Punkte B_2, B_3, B_4 die zweite, dritte und vierte Potenz von $a+bi$ dar. Die Drehungsbogen der Richtungen OB_2, OB_3 und OB_4, mit

Fig. 54.



*) Mit dem positiven Potenzexponenten. Man sehe Note IX S. 443.

anderen Worten: die Winkel, den diese Geraden mit OA bilden, sind zwei-, drei-, viermal so groß als der Winkel, welchen OB_1 mit OA darstellt. Die Längen OB_1, OB_2, $OB_3 \cdots OB_n$ sind gleich r, r^2, $r^3 \cdots r^n$. Die Punkte B_1, B_2, B_3 u. s. f., welche die Potenzen von $a + bi$ zur Anschauung bringen, sind Punkte einer Kurve, welche den Namen „logarithmische Spirale" führt.

5) Soll umgekehrt eine durch Punkt B_n dargestellte komplexe Zahl durch einen ganzen positiven Wurzelexponenten n auf geometrischem Wege radiziert werden, so muß man den Winkel, welchen der radius vector OB_n mit OA bildet, in n gleiche Teile teilen. Alsdann versinnlicht Punkt B_1 auf der ersten Teilungslinie, dessen radius vector $OB_1 = \sqrt[n]{OB_n}$ ist, die gesuchte Wurzel. Um z. B. aus der durch Punkt B_4 dargestellten Zahl $p + qi$ geometrisch die vierte Wurzel zu ziehen, teile man $\sphericalangle AOB_4$ in vier gleiche Teile und mache auf der ersten Teilungslinie $OB_1 = \sqrt[4]{OB_4}$, so bezeichnet der Punkt B_1 durch seine Lage in der Zahlenebene die $\sqrt[4]{p + qi}$.

Zur Ermittelung der Formel zur Berechnung der Quadratwurzel aus $a \pm bi$ setze man vorläufig:

$$1) \quad \sqrt{a \pm bi} = x \pm yi.$$

Erhebt man diese Gleichung ins Quadrat, so entsteht:

$$2) \quad a \pm bi = x^2 - y^2 \pm 2xyi.$$

Nach § 118, 1) bestehen folgende Beziehungen:

$$3) \quad x^2 - y^2 = a, \qquad 4) \quad 2xy = b.$$

Diese Gleichungen quadriert, die erhaltenen Gleichungen addiert und hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt:

$$5) \quad x^2 + y^2 = + \sqrt{a^2 + b^2}.^{*)}$$

Aus 3) und 5) erhält man:

$$x = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \qquad y = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Bezeichnet man $\sqrt{a^2 + b^2}$ zur Kürze mit w und setzt die

*) Hier ist nur das positive Vorzeichen zu setzen, weil x und y reelle Zahlen bezeichnen sollen.

Werte für x und y in die erste Gleichung ein, so erhält man die gesuchte Formel, nämlich:

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(w + a)} \pm i \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}(w - a)}\,.$$

Beispiele:

$$\sqrt{21 + 20i} = \sqrt{\frac{w + 21}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{w - 21}{2}}\,;$$

$$w = \sqrt{441 + 400} = 29\,;$$

mithin:

$$\sqrt{21 + 20i} = \sqrt{\frac{29 + 21}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{29 - 21}{2}} = 5 + 2i\,.$$

Geschichtliche Bemerkungen zum siebenten Abschnitt. Eine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl, d. i. die imaginäre Größe, erscheint zum ersten Male, jedoch in mißverstandener Form, bei Heron von Alexandria. Brahmagupta sagt in seiner Algebra: „Es giebt keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl; denn diese ist kein Quadrat." Die imaginären und komplexen Zahlen gelangten indes erst nach Kenntnis der Auflösung der höheren Gleichungen zur Einführung in die allgemeine Arithmetik. Dieselben wurden aber ursprünglich von einem falschen Gesichtspunkte aus betrachtet „und es wurde eine geheimnisvolle Dunkelheit dabei gefunden", wie Gauß bemerkt. Sie erschienen als ein inhaltleeres Zeichenspiel, man wußte sie nicht zu deuten und nannte sie „unmögliche" Größen, weil sie durch natürliche Zahlen nicht ersetzt werden konnten. (Auch Differenzen, deren Wert eine negative Zahl liefert, wurden früher als unmögliche Zahlen bezeichnet.) D'Alembert und Euler zeigten zwar den Nutzen dieser beiden Zahlformen in vielen Untersuchungen, doch waren diese Größen mehr geduldet als für berechtigte Zahlen anerkannt. Es war nach Argands Vorgang dem scharfsinnigen, vielseitigen deutschen Mathematiker Gauß vorbehalten, die imaginären und komplexen Zahlen mit Benutzung geometrischer Darstellungen zur Anschauung zu bringen und ihre Theorie streng wissenschaftlich zu begründen. — Die Ausdrücke reell und imaginär sind zuerst von Descartes als Bezeichnungen der Wurzeln von Gleichungen gebraucht worden.

§ 121. Rückblick.

Unsere Betrachtungen über den Zahlbegriff nahmen ihren Ausgangspunkt von den natürlichen Zahlen, welche Dinge derselben Art schlechtweg zählen. Wir versinnlichten uns das unbegrenzte Gebiet dieser Zahlen durch Punkte, die in gleichen

Abständen voneinander in einer nach einer Seite unbegrenzten Geraden liegen (§ 1). Bei der Subtraktion trat die Notwendigkeit ein, in der Differenz $a - b$ der natürlichen Zahlen die ursprüngliche Bedingung $a > b$ fallen zu lassen, das Zahlengebiet über die frühere Grenze Null hinaus, also nach der entgegengesetzten Seite hin, unbegrenzt zu erweitern. Nunmehr erhielt die Null den Charakter einer Zahl, den früheren natürlichen Zahlen legten wir den Namen positive und der neuen Zahlart die Bezeichnung negative Zahl bei. Zur Versinnlichung der letzteren diente uns eine unendliche Anzahl von Punkten, die von Null aus die Punktreihe der natürlichen Zahlen nach links, und zwar in derselben Geraden liegend, fortsetzte (§ 31). — Die Division führte uns auf eine neue Zahlform, den Bruch, indem wir in dem Quotienten $a:b$ die ursprüngliche Einschränkung, a ist ein Vielfaches von b, fallen ließen und die Definitionsformel $(a:b) \cdot b = a$ allgemein auf Zahlverbindungen von der Form $a:b$ ausdehnten, gleichviel ob b in a aufging oder nicht. Wir stellten die Brüche in unserm geometrischen Zahlenbilde durch Punkte dar, die ihre Lage zwischen den die ganzen Zahlen veranschaulichenden Punkten hatten (§ 58). — Beim Ausziehen der Quadratwurzeln gewannen wir wieder eine neue Zahlart, die Irrationalzahlen, und indem wir diese in unserm Zahlenbilde durch Punkte zur Anschauung brachten, ging das Bild in eine lückenlose, unbegrenzte Gerade über (§ 115). — Um die reine quadratische Gleichung:

$$x^2 \pm a = 0$$

allgemein auflösen zu können, mußten wir die imaginären Quadratwurzeln als neue Zahlart einführen und wir stellten diese Zahlen durch Punkte einer unbegrenzten Geraden dar, welche im Anfangspunkt der die reelle Zahlenreihe versinnlichenden Linie auf dieser senkrecht steht (§ 118). — Das Bedürfnis, die gemischte quadratische Gleichung:

$$x^2 \pm px \pm q = 0$$

allgemein aufzulösen, forderte die Einführung der komplexen Zahlen in die allgemeine Arithmetik. Die imaginären und

komplexen Zahlen sind für die allgemeine Anwendung der arithmetischen Gesetze ebenso Bedürfnis, wie die reellen Zahlen. Der Grund, weshalb uns erstere fremder und weniger bedeutsam erscheinen, liegt zunächst darin, daß in der reellen Zahlenreihe die uns seit frühester Jugend bekannten natürlichen Zahlen vorkommen, daß wir mit den reellen Zahlen überhaupt weit vertrauter sind als mit den komplexen Zahlen, und erstere vielfach auf Größen Anwendung finden, die imaginären Zahlen dagegen nicht. Die wissenschaftliche allgemeine Arithmetik dagegen braucht in ihren höheren Teilen nur die komplexen Zahlen zu berücksichtigen, weil diese Zahlart die reellen und die imaginären Zahlen als besondere Fälle einschließt. Mit der komplexen Zahl hat die allgemeine Arithmetik ihre natürliche Begrenzung gefunden, eine fernere Erweiterung des Zahlbegriffs ist ausgeschlossen, unter der Voraussetzung, daß sämtliche Rechengesetze der allgemeinen Arithmetik gewahrt bleiben sollen. Will man einzelne dieser Gesetze fallen lassen, so kann man allerdings beliebig viele neue Zahlformen ins Leben rufen, die auch für gewisse mathematische Untersuchungen ihren Wert haben.*) Aber niemals darf man vergessen, daß diese Gedankendinge keine eigentlichen Zahlen mehr sind. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen ergab Punkte, welche außerhalb der beiden Zahlenachsen in der durch dieselben bestimmten Gaußischen Zahlenebene liegen, und zwar so, daß jeder Punkt dieser Ebene eine bestimmte Zahl versinnlicht.

Als Ergebnis der Untersuchungen über die geometrische Darstellung der Zahlen hat sich herausgestellt, daß es zwei Zahlenachsen, eine reelle und eine imaginäre und eine Zahlenebene giebt, und hiermit haben unsere Erörterungen über diesen Gegenstand ihren Abschluß gefunden.

*) Schefflers „Situationskalkül“ (Braunschweig 1851), Hamiltons „Quaternionen“, Graßmanns „Ausdehnungslehre“. Man sehe die X. Note Seite 444.

Anhang.

Ergänzungen und Anmerkungen zur Arithmetik und Algebra.

I) **Schriftliches Subtrahieren nach der „Ergänzungsmethode“.** Die eigentliche Subtraktion (§ 4) verlangt, daß man von einer gegebenen Zahl, dem Minuenden, aus um die Einheiten des Subtrahenden im Zahlengebiet rückwärts schreite. Man erhält aber auch die gesuchte Differenz, wenn man vom Subtrahenden aus bis zum Minuenden fortschreitet, also vorwärts zählt, d. h. den Subtrahenden durch Hinzufügen von Einheiten zum Minuenden ergänzt. Statt also z. B. die Differenz 12 — 9 zu berechnen, indem man von 12 um 9 Einheiten rückwärts schreitet, zählt man mit 9 beginnend bis 12 und faßt die hinzugefügten Einheiten in eine Zahl (3) zusammen. Diese Art, die Subtraktion auszuführen, läßt sich sehr zweckmäßig am Bilde der natürlichen Zahlenreihe (§ 1) zur Anschauung bringen. Die Subtraktion mittels Ergänzen schließt sich unmittelbar an die vorausgegangene Rechnungsart, die Addition, an, und schon aus diesem Grunde sollte das Abziehen dekadischer Zahlen im Schulunterricht stets durch Addition ausgeführt werden.*) Man gehe

*) Diese Methode hat vor dem gebräuchlicheren Verfahren wesentliche Vorzüge. Die inversen Rechnungsarten sind überhaupt schwieriger als die direkten. Das Rückwärtsschreiten im Zahlengebiet ist uns weniger geläufig als das Vorwärtsschreiten. Letzteres ist natürlich, das Vorwärtsgehen in einer Reihe (von Vorstellungen oder Begriffen) wird durch die ursprüngliche Auffassung selbst bestimmt; das Rückwärtsschreiten ist künstlich und erfordert zur Sicherheit besonders tüchtige Übung. Wer wollte sich getrauen, ohne anhaltende Übung z. B. die Töne eines Liedes, die Wörter eines größeren Satzes u. s. f. in umgekehrter Reihenfolge ohne Verstöße wiederzugeben? Daß das „Ergänzen“ die natürlichste und einfachste Methode ist, die Differenz zu berechnen, ergiebt sich auch aus der Thatsache, daß im praktischen Verkehrsleben durchgängig auf diese Weise verfahren wird. Die gewöhnliche Form des Abziehens

daher zur Einführung in diese Form, die Differenz zweier Zahlen zu berechnen, von der Lösung einer Aufgabe der Addition, z. B. 5142 + 4725 aus. Es ist: 5142 + 4725 = 9867. Wäre nun etwa der zweite Summand unbekannt, so würde die entsprechende Aufgabe der Subtraktion lauten: 9867 — 5142. Nach dem Hauptgesetze der Subtraktion ist der Minuend 9867 gleich der Summe aus dem Subtrahenden und dem Rest (§ 4). Man findet offenbar diesen Rest (Differenz), den zweiten Summanden 4725, indem man die einzelnen Stellenwerte des Subtrahenden, ersten Postens, zu den gleichartigen Rangziffern des Minuenden (der Summe 9867) ergänzt. Ersetzen wir diese unbekannten „Ergänzungswerte" in der schriftlichen Darstellung vorläufig durch einen Punkt, so haben wir die ursprüngliche Form unter a).

a)
```
5142
••••
────
9867
```

b)
```
9867
5142
────
4725.
```

An Stelle der Punkte sind die einzelnen Rangziffern zu setzen, welche die Stellenwerte der Zahl 5142 zu der Summe 9867 ergänzen. Dieser Auffassung gemäß spreche man: 2 E. und 5 E. = 7 E.; 4 Z. und 2 Z. = 6 Z.; 1 H. und 7 H. = 8 H.; 5 Tsd. und 4 Tsd. = 9 Tsd. Die hinzugelegten Werte 5 E., 2 Z. u. s. f. werden gleichzeitig mit dem Aussprechen derselben hingeschrieben. Hierauf gehe man zu der gebräuchlichen Darstellung b) über.

Wird beim Ergänzen einer Rangziffer des Subtrahenden der Zehner überschritten, so setzt man dem nächst höhern Stellenwert des Subtrahenden eine (gleichartige) Einheit zu. Die Richtigkeit des Verfahrens beruht auf dem Lehrsatze § 5, 5.

---

macht Anfängern erhebliche Schwierigkeiten in den Fällen, in welchen einzelne Rangziffern des Minuenden kleiner sind als die gleichartigen Stellenwerte des Subtrahenden, besonders wenn im Minuenden mehrere Nullen aufeinander folgen. Dann tritt beim gebräuchlichen Subtrahieren das sogenannte „Borgen" oder „Leihen" ein, eine Klippe, an welcher schwächere Schüler fast immer scheitern. Die Wahrheit des im bürgerlichen Leben häufig angewendeten Spruches: „Borgen macht Sorgen" (d. h. das Borgen veranlaßt mancherlei Fehler), gelangt auch hier zur Geltung. Auch zur Vorbereitung der „kurzen Division" ist die Einübung der Ergänzungsmethode notwendig. — Die Ermittelung der Differenz durch Addition war schon den alten Indern bekannt. Dies Rechnungsverfahren ist im „Handbuch der Arithmetik" (Erfurt 1834) von Unger und in Noël, „Arithmétique" (1835) erläutert. In neuester Zeit haben besonders Kober, Harms, J. C. V. Hoffmann und Kallius diese Methode empfohlen.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 7\,182 \\ -\,3\,648 \\ \hline 3\,534\,. \end{array}$$

Sprechweise (ohne Benennung des Ranges der Ziffern): 8 und 4 = 12; 1, 5 und 3 = 8; 6 und 5 = 11; 1, 4 und 3 = 7.

Diese Methode ist besonders dann zu empfehlen, wenn mehrere dekadische Zahlen addiert und die erhaltene Summe von einer andern Zahl subtrahiert werden soll. Es sei z. B. die Summe:

$$7925 + 679 + 4876 + 37984$$

von 95192 abzuziehen.

Darstellung:

$$\begin{array}{r} 95\,192 \\ \hline 7\,925 \\ 679 \\ 4\,876 \\ 37\,984 \\ \hline 43\,728\,. \end{array}$$

Sprechweise: 4, 10, 19, 24 und 8 = 32; (3 höhere Einheiten hinzugefügt) 3, 11, 18, 25, 27 und 2 = 29; 2, 11, 19, 25, 34 und 7 = 41; 4, 11, 15, 22 und 3 = 25; 2, 5 und 4 = 9.

II) **Die umgekehrte Multiplikation.** Man nennt diejenige Ausführung der schriftlichen Multiplikation mehrstelliger Zahlen mit mehrstelligen, bei welcher mit der niedrigsten Ordnung begonnen und mit der höchsten Rangziffer des Multiplikators geschlossen wird, das Normalverfahren. Große Vorteile beim abgekürzten Multiplizieren von Dezimalen mit Dezimalen gewährt die umgekehrte Multiplikation, bei welcher der Rechner mit der höchsten Ordnung des Multiplikators anfängt.

III) **Die kurze Division.** 1) Als Vorübung zur kurzen Division durch einen mehrteiligen Divisor dient das direkte Abziehen von Produkten aus einer mehrstelligen Zahl mit einer einstelligen von einer mehrteiligen Zahl.

Beispiel: $9\,581 - 7 \times 836$

Rest $3\,729$.

Sprechweise: $7 \times 6 = 42$ und $9 = 51$; $(7 \times 3) + 5 = 26$ und $2 = 28$; $(7 \times 8) + 2 = 58$ und $7 = 65$; 6 und 3 = 9. Also heißt die Differenz 3729.

2) Die abgekürzte Division besteht darin, daß die Teilprodukte nicht angeschrieben, sondern nach 1) unter den Querstrich direkt der Rest gesetzt wird. Ist der Divisor keine zu große zweistellige Zahl, so sollten stets sofort die Reste niedergeschrieben werden. Siehe das Beispiel unter a).

a) 772 865 : 18 = 42 936
52
16 8
66
125
Rest 17.

b) 3 635 678 : 976 = 3 725
707 6
24 47
4 958
Rest 78.

Sprechweise zu b): 3635 durch 976 = 3, 3 × 6 = 18 und 7 = 25; (3 × 7) + 2 = 23 und 0 = 23; (3 × 9) + 2 = 29 und 7 = 36. Zum Reste 707 die 6. Dann 7076 durch 976 = 7; 7 × 6 = 42 und 4 = 46; (7 × 7) + 4 = 53 und 4 = 57; (7 × 9) + 5 = 68 und 2 = 70 u. s. f.

IV) **Abgekürztes Rechnen mit Dezimalbrüchen.** Beim praktischen Rechnen mit Dezimalbrüchen, welche eine größere Anzahl Stellen haben, wird häufig das Resultat auf eine geringe Anzahl Stellen verlangt. Man kürzt daher den Dezimalbruch nach folgender Regel: Die letzte verlangte Stelle wird um 1 erhöht, wenn die folgende der weggelassenen Ziffern 5 oder größer als 5 ist, im andern Falle wird dieselbe ohne weiteres gestrichen.

1) Addition. Sollen mehrere Dezimalbrüche addiert und das Ergebnis nur auf eine bestimmte Anzahl Stellen angegeben werden, so berücksichtige man bei wenigen Summanden in der Rechnung eine Stelle, bei 5 und mehr Posten zwei Stellen mehr als gewünscht wird und kürze die erhaltene Summe nach der vorhin gegebenen Regel.

6,735	54
3,527	2
4,862	937
15,125	6

s = 15,126.

8,924	375
5,168	53
2,645	784
19,261	847
0,984	62
1,738	539
38,723	67

s = 38,724.

2) Subtraktion. Bei der Subtraktion zweier Dezimalzahlen berechne man im Rest eine Stelle mehr, als Dezimalen verlangt werden, und kürze das Ergebnis nach der bekannten Regel.

3) Multiplikation. Es sei der Wert des Produktes 24,673 × 36,752 auf zwei Stellen zu berechnen.

Form a)

36,752
× 24,673
110256
2 57264
22 0512
147 008
735 04
906,782096.

Form b)

36,752	
37 642	
735 04	
147 00	8
22 05	12
2 57	264
11	0256
906,78	2096.

Bemerkungen zu Form a). Wenn wir die niedrigste Rangziffer des Multiplikanden, nämlich 0,002, mit dem höchsten Stellenwert des Multiplikators multiplizieren, so erhalten wir 0,04. Es ist also 20 × 36,752 unverkürzt zu berechnen. Das Produkt 4 × 0,002 liefert 0,008, welche Zahl nur hinsichtlich ihres Einflusses auf die Zehntel für die Rechnung inbetracht kommt. Man hat also ferner (4 × 36,75) + 0,008 auszuführen. Da 0,6 × 0,002 = 0,0012 für das gewünschte Ergebnis keinen Wert hat, und 0,6 × 0,05 = 0,03 ist, so heißt die dritte Rechnung: (0,6 × 36,7) + 0,03. Bei der Multiplikation 0,07 × 36,752 kann man die Stellen 0,052 unterdrücken, da 0,07 × 0,052 = 0,00364 für das geforderte Ergebnis außer acht bleibt. Es ist also weiter 0,07 × 36 zu berechnen und der Einfluß von 0,07 × 0,7 = 0,049 nämlich 0,05 zu addieren. Endlich sind in dem Produkt 0,003 × 36,752 die Dezimalstellen zu streichen, da 0,003 × 0,752 = 0,002256 ohne Einfluß auf die gewünschten Stellen ist. Das letzte Teilprodukt heißt also 0,003 × 30, zu welchem 0,003 × 6 = 0,018 d. i. 0,02 zu addieren ist.

Aus dieser Überlegung ergiebt sich folgende praktische Ausführung der Rechnung (Form b): Man schreibe den Multiplikator in **umgekehrter** Ordnung unter den Multiplikanden und zwar so, daß die **Einer** des ersteren unter die Stelle zu stehen kommen, welche die verlangte Anzahl Stellen n um 1 überschreitet, also unter die $(n+1)$te Stelle. Erforderlichen Falls hänge man dem Multiplikanden Nullen an. Hierauf vollziehe man mit der ersten Ziffer (rechts) des Multiplikators an der senkrecht über derselben stehenden Ziffer sowie an allen höheren Rangzeichen des Multiplikanden die Multiplikation. Gerade so verfährt man mit den übrigen Stellen des Multiplikators. Beim ersten Teilprodukte berücksichtige man zur Erzielung eines genaueren Resultates stets den Einfluß der nächst niederen Stelle des Multiplikanden. Die erhaltenen Produkte werden so angeschrieben, daß die ersten Ziffern rechts eine senkrechte Reihe bilden, und erstere wie ganze Zahlen addiert. Schließlich schneidet man von der Summe die berechneten $n+1$ Dezimalen ab und kürzt auf die gewünschten n Stellen.

Beispiel: 5,74 × 78,6842 (2 Stellen).

	78,6842	
	475	
1)	393 421	1) Zuerst 5 × 2 = 10, hierauf 5 × 78684.
2)	55 079	2) 7 × 4 = 28, Einfluß 3, dann 7 × 7868.
3)	3 147	3) 4 × 8 = 32, Einfluß 3, hierauf 4 × 786.
	451,647	

$p = 451,65.$

4) Division. Bei der abgekürzten Division verfahre man nach folgenden Regeln: α) zuerst sind Dividend und Divisor gleichnamig zu

machen; β) bis zum Beginn der Dezimalstellen des Quotienten verläuft die Rechnung nach dem Normalverfahren; γ) statt nun dem Reste R eine Null anzuhängen, dividiere man den Teiler t durch 10 und führe die Division des Quotienten $R : \frac{t}{10}$ aus, indem man den Einfluß der weggeworfenen Ziffer auf das abzuziehende Teilprodukt berücksichtigt.

Beispiel: Der Umfang eines Kreises sei 20,785 m, wie groß ist sein Durchmesser, wenn $\pi = 3,141593$ gesetzt wird? (Antw. 5 Stellen.)

$$20,785 : 3,141593 = q.$$

$$\begin{array}{r@{\;:\;}l}
20\,785\,000 & 3\,141593 = 6,61606 \\
1\,935\,442 & 3\,141593 \\
50\,487 & 3\,14159 \;(31416) \\
19\,071 & 3\,1415 \\
222 & 3\,141 \\
222 & 314 \\
34 &
\end{array}$$

$$q = 6,61606.$$

V) Die durch die Gleichungen:

$$1)\quad \frac{\begin{array}{c} a \gtrless b \\ c = c \end{array}}{a \pm c \gtrless b \pm c,} \qquad\qquad 2)\quad \frac{\begin{array}{c} a > b \\ c > d \end{array}}{a + c > b + d,}$$

$$3)\quad \frac{\begin{array}{c} a > b \\ c < d \end{array}}{a - c > b - d}$$

ausgesprochenen Lehrsätze: 1) Gleiches zu Ungleichem addiert, Gleiches von Ungleichem subtrahiert, giebt Ungleiches, und 2) Größeres zu Größerem addiert, Kleineres von Größerem subtrahiert, giebt Größeres, sind **allgemein** (für beliebige positive und negative Zahlen einschließlich der Null) gültig. Dagegen ist die strenge Befolgung der durch die Gleichungen:

$$3)\quad \frac{\begin{array}{c} a > b \\ c = c \end{array}}{ac > bc,} \qquad \frac{\begin{array}{c} a > b \\ c > d \end{array}}{ac > bd,} \qquad\qquad 4)\quad \frac{\begin{array}{c} a = b \\ c > d \end{array}}{\frac{a}{c} < \frac{a}{c}}$$

dargestellten Lehrsätze, nämlich: 3) Größeres mit Gleichem multipliziert, liefert Größeres, und 4) Gleiches durch Größeres dividiert, giebt Kleineres, nur dann statthaft, wenn die Buchstaben a, b, c und d **positive** Zahlen bezeichnen. Wollte man vorstehende Gleichungen auch für das Rechnen mit bestimmten negativen Zahlen

und Null gelten lassen, so würde man auf Ungereimtheiten stoßen, z. B.:

$100 > 1$	$18 > 1$	$-1 > -5$
$0 = 0$	$-4 = -4$	$-2 = -2$
$100 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0;$	$-72 > -4;$	$2 > 10$.

VI) **Bedeutung und Anwendung der Klammern.** Sollen zwei oder mehrere Zahlen (mehrgliederige Ausdrücke) als **eine** Zahl bezeichnet und mit andern Größen verknüpft werden, so bedient man sich der Klammern oder Parenthesen. Die Klammern dienen in der Arithmetik einem dreifachen Zweck: 1) in der Entwickelung und Bezeichnung der Formeln sind sie das Mittel, um die Art der Zahlverbindung und die arithmetische Wahrheit sofort deutlich zu kennzeichnen. So ist z. B. zwar hinsichtlich der Rechnung die linke Seite der Formel III § 6:

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

übereinstimmend mit:

$$a - b + c - d,$$

aber in der ersten Darstellung heben die Klammern deutlich und übersichtlich hervor, daß es sich um die Addition zweier Differenzen handelt, wodurch der betreffende Lehrsatz § 6, 6 in ein helles Licht gesetzt ist. 2) Klammern bestimmen die Reihenfolge der auszuführenden Operationen, den Gang der Rechnung. Z. B.:

$$50 - (18 + 12) = 50 - 30 = 20; \qquad 5(36 + 4) = 5 \cdot 40 = 200;$$

$$a + (b + c); \qquad a + (b - c).\text{*)}$$

3) bezeichnen Klammern bestimmte Veränderungen und Rechenarbeiten, welche mit den eingeschlossenen Zahlen zu vollziehen sind. So z. B. bedeutet der Ausdruck $a - (b + c)$, daß von der Zahl a sowohl b als c subtrahiert werden soll. Daher ist:

$$\text{I)} \qquad a - (b + c) = a - b - c.$$

Der Ausdruck $a - (b - c)$ hat folgenden Sinn: die Differenz $b - c$ soll von a subtrahiert werden. Zieht man vorläufig b Einheiten ab, so hat man offenbar c Einheiten zu viel weggenommen. Damit das Ergebnis richtig wird, muß man c Einheiten addieren. Mithin ist:

$$\text{II)} \qquad a - (b - c) = a - b + c.$$

Aus den Formeln I) und II) geht hervor, daß die Klammern beim Subtrahieren mehrgliederiger Ausdrücke von entschiedener Bedeutung sind und nicht unbedingt weggelassen werden dürfen. Läßt man, wie in I) und

---

*) Für das Ergebnis der Rechnung sind die Klammern in den beiden allgemeinen Beispielen überflüssig.

II) geschehen, die Klammern fort und nimmt mit den Zahlen innerhalb derselben die notwendigen Veränderungen vor, so sagt man, die Klammern sind aufgelöst. Für das praktische Rechnen merke man sich folgende Klammerregeln:

1) Steht das Zeichen + vor der Klammer, so bleiben die umschlossenen Glieder nach Wegfall der Klammern unverändert. Steht vor der Klammer das Minus-Zeichen, so erhält jedes Glied innerhalb der Klammern bei Wegfall derselben das entgegengesetzte Rechenzeichen.

2) Setzt man nach dem Zeichen + Klammern, so bleiben die Rechenzeichen aller einzuschließenden Zahlen unverändert (Umkehrung von 1). Wird nach dem Minus-Zeichen eine Klammer gesetzt, so muß man sämtlichen Gliedern, welche die Klammer umfaßt, das entgegengesetzte Rechenzeichen geben. (Die Richtigkeit dieser Regeln ergiebt sich auch aus den Formeln § 3, 5; § 6, I, II und IV.)

Es sind zwei Formen von Klammern in Gebrauch, die runde (und die eckige [. Bei der Berechnung eines von beiden Klammerformen umschlossenen Ausdrucks beginnt man entweder mit den inneren oder mit den äußeren Klammern. So ist z. B.:

$$16 - [8 - (2 + 1)] = 16 - [8 - 3] = 16 - 5 = 11$$

$$16 - 8 + (2 + 1) = 16 - 8 + 3 = 8 + 3 = 11.$$

Um anzudeuten, daß mehrgliederige Ausdrücke multipliziert oder dividiert werden sollen, schließt man sie ebenfalls in Klammern ein. Soll die Summe (Differenz) $a \pm b$ mit c multipliziert oder durch c dividiert werden, so schreibt man $(a \pm b)c$, bezw. $(a \pm b) : c$. Besteht der Multiplikator ebenfalls aus mehreren Gliedern, so schließt man beide Faktoren durch Klammern ein. Um anzuzeigen, daß $a \pm b$ mit $c \pm d$ multipliziert werden soll, schreibt man $(a \pm b)(c \pm d)$. Sind Dividend und Divisor mehrgliederig, so werden beide in Klammern gefaßt. Soll $a \pm b$ durch $c \pm d$ dividiert werden, so bezeichnet man dies durch $(a \pm b) : (c \pm d)$. Letzteren Ausdruck kann man auch so schreiben: $\frac{a \pm b}{c \pm d}$. Ferner ist:

$$a - (b + c - d) : m = a - \frac{b + c - d}{m}.$$

Hieraus folgt, daß bei Quotienten mit mehrteiligem Dividenden oder Divisor der Divisions- oder Bruchstrich die Klammer vertritt und umgekehrt, an Stelle des Querstrichs Klammern gesetzt werden können. Der Bruchstrich hat also eine zweifache Bedeutung: er ist Zeichen der Division und vertritt die

Klammern. Daher erhält jedes Glied eines Bruches mit dem Vorzeichen — und mit mehrteiligem Zähler nach ausgeführter Subtraktion und nach Wegfall des Bruchstriches das entgegengesetzte Vorzeichen. Diese Regel hat der Lernende wohl zu beachten. (Vergleiche § 89, 1.)

VII) **Zu S. 309, § 97.** Die Auflösung eines linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten besteht (nach dem Vorhergehenden und § 98) darin, unter den unzählig vielen Lösungen der einzelnen Gleichungen die ihnen **gemeinschaftliche** Auflösung zu finden. Läßt man dieser Erklärung gemäß, wie es meistens geschieht, nur ein bestimmtes, endliches Zahlenpaar als Auflösung gelten, so muß das gegebene Gleichungssystem zur Berechnung des einen Wertepaares die unter a) und b) gegebenen Eigenschaften erfüllen. Einige Mathematiker (z. B. Baltzer, Schlegel) betrachten die Bedingungen unter a) und b) nicht geradezu als Ausnahmefälle des Begriffes „Auflösung". Sie sagen: Besteht das System aus abhängigen Gleichungen, so genügen demselben unzählig viele Auflösungen. Und widersprechen die Gleichungen einander, so wird dasselbe durch unendliche Werte der Unbekannten befriedigt. (Man vergleiche die Anmerkung Seite 328.)

VIII) **Zur Anwendung der vollständigen quadratischen Gleichung.** Die Kenntnis der Auflösung gemischter quadratischer Gleichungen setzt uns instand, den mittleren Zahlungstermin von unverzinslichen Kapitalien richtig*) zu berechnen.

Beispiel. A kauft von B ein kleines Landgut für 22800 ℳ. Laut Vertrag hat der Ankäufer 12000 ($= a$) ℳ nach $1\frac{1}{2}$ ($= t$) Jahren und den Rest 10800 ($= a_1$) ℳ nach 6 ($= u$) Jahren und zwar beide Kapitalien ohne Zinsen zu zahlen. Jedoch steht A das Recht zu, die Kaufsumme auf einmal abzutragen und es sollen, falls der Ankäufer hiervon Gebrauch macht, der Berechnung des Haupttermins 5 ($= p$) Prozent Zinsen p. a. zugrunde gelegt werden. Wann muß die ganze Kaufsumme an B ausgezahlt werden?

1) Auflösung. Der mittlere Verfalltag fällt offenbar zwischen $1\frac{1}{2}$ und 6 Jahre. Bezeichnet man die gesuchte Zeit mit x, so ist $1\frac{1}{2} < x < 6$. Zahlt der Ankäufer 12000 ℳ nach x Jahren, so stehen dem Gläubiger laut Vertrag die Zinsen von diesem Kapital zu 5 Prozent für $x - 1\frac{1}{2}$ Jahre zu, nämlich:

$$1)\quad \frac{12000 \cdot 5(x - 1\frac{1}{2})}{100}\,\mathcal{M} = 120 \cdot 5(x - 1\tfrac{1}{2})\,\mathcal{M}$$

*) Das im Rechenunterricht gewöhnlich gelehrte Verfahren zur Bestimmung des mittleren Verfalltages zinsfreier Kapitalien beruht auf falschen Unterlagen und liefert ein zu großes Ergebnis.

Da der Schuldner 10800 ℳ 6 — x Jahre vor ihrem Fälligkeitstermine entrichtet, so muß ihm der Gläubiger kontraktlich für diese Zeit einen Abzug an Zinsen zu 5 Prozent auf 100 gewähren. Diese Vergütung beträgt:

$$2)\quad 10800 \cdot \frac{5(6-x)}{100+5(6-x)} ℳ$$

Da die Werte unter 1) und 2) einander gleich sein müssen, so besteht die Gleichung:

$$120 \cdot 5(x - 1\tfrac{1}{2}) = 10800 \cdot \frac{5(6-x)}{100+5(6-x)}.$$

Hieraus folgt:

$$x - 1\tfrac{1}{2} = \frac{18(6-x)}{26-x} \quad \text{oder} \quad x^2 - 45\tfrac{1}{2}x + 147 = 0.$$

Mithin:

$$x = \tfrac{1}{4}(91 \pm 77); \qquad x_1 = 42, \quad x_2 = 3\tfrac{1}{2}.$$

Da laut Bedingung der Aufgabe der gesuchte Zeitpunkt x größer als $1\frac{1}{2}$ und kleiner als 6 sein muß, so ist für die Aufgabe nur der zweite Wurzelwert $x = 3\frac{1}{2}$ zu verwenden, obgleich auch der erste eine positive Zahl bezeichnet. Die Gesamtschuld kann also nach $3\frac{1}{2}$ Jahren ohne Nachteil für den Gläubiger und den Schuldner abgetragen werden.

2) Auflösung. Bezeichnet man den gesuchten Haupttermin mit x, so müssen die nach Maßgabe der Bedingungen des Vertrages auf diesen Zeitpunkt berechneten Rechte (Forderungen) von Gläubiger und Schuldner sich mit der Gesamtschuld 22800 ℳ ausgleichen. Der Verkäufer hat nach x Jahren an Kapital und Zinsen (nach Formel 1) Seite 246, 2):

$$1)\quad 12000 \cdot \frac{100 + 5(x - 1\frac{1}{2})}{100} ℳ$$

zu beanspruchen und der Schuldner braucht statt 10800 ℳ (gemäß Formel 2) Seite 246):

$$2)\quad 10800 \cdot \frac{100}{100+5(6-x)} ℳ$$

zu zahlen. Da der Gläubiger die Kaufsumme 22800 ℳ unverkürzt zu fordern hat, so muß:

$$12000 \cdot \frac{100 + 5(x - 1\frac{1}{2})}{100} + 10800 \cdot \frac{100}{100+5(6-x)} = 22800$$

sein. Aus dieser Gleichung findet man wie vorhin $x_1 = 42$ und $x_2 = 3\frac{1}{2}$.

Bezeichnen a und a_1 zwei vor dem Haupttermine fällige Kapitalien, t und t_1 die zugehörigen Verfallzeiten, b eine nach dem mittleren Zahlungstermin fällige Schuldsumme, u ihre Verfallzeit, so heißt die allgemeine Gleichung nach der ersten Auflösung:

$$\text{I)}\quad \frac{a \cdot p(x-t)}{100} + \frac{a_1 \cdot p(x-t_1)}{100} = \frac{b \cdot p(u-x)}{100 + p(u-x)}.$$

Durch p dividiert, den Faktor $\frac{1}{100}$ herausgesetzt und $\frac{p}{100} = k$ gesetzt, giebt:

$$\frac{1}{100}[a(x-t) + a_1(x-t_1)] = \frac{b(u-x)}{1+k(u-x)} \cdot \frac{1}{100}$$

oder:

$$\text{II)} \quad a(x-t) + a_1(x-t_1) = \frac{b(u-x)}{1+k(u-x)}.$$

Nun ist, wie man durch Division findet:

$$\frac{b}{1+k(u-x)} = b - \frac{bk(u-x)}{1+k(u-x)}.$$

Setzt man diese Quotienten rechts in die Gleichung II) ein, so entsteht:

$$a(x-t) + a_1(x-t_1) = b - \frac{bk(u-x)}{1+k(u-x)}(u-x).$$

Hieraus folgt:

$$x(a+a_1+b) + k \cdot \frac{b(u-x)^2}{1+k(u-x)} = at + a_1 t_1 + bu.$$

Diese Gleichung durch $a + a_1 + b$ dividiert liefert die allgemeine Termin-gleichung, bezw. Formel für den mittleren Verfalltag der Kapitalien a, a_1 und b, nämlich:

$$\text{III)} \quad x + \frac{k}{a+a_1+b} \cdot \frac{b(u-x)^2}{1+k(u-x)} = \frac{at + a_1 t_1 + bu}{a+a_1+b}.$$

Diese Gleichung lehrt, wie sich der richtige Wert für den mittleren Zahlungstermin zu dem im Rechnen mittels der Durchschnittsregel ermittelten Ergebnis verhält. Da das zweite Glied der Gleichung III) stets einen positiven Wert liefert, so folgt, daß die Terminzahl in III) stets kleiner als das Resultat der Durchschnittsrechnung ist, welches, wie ersichtlich ist, erhalten wird, wenn man das zweite Glied der strengen Formel III) unterdrückt. Die Endgleichung zur Auffindung des mittleren Verfalltages ist vom zweiten, dritten, vierten Grade, je nachdem eine Zahlung, zwei oder drei Schuldsummen nach dem Haupttermine fällig sind. Der Grad der Endgleichung (Normalform) ist stets um 1 größer als die Anzahl der nach dem gesuchten Haupttermine fälligen Kapitalien. Man kann indes die höhere Gleichung umgehen, wenn man zunächst den mittleren Zahlungstermin zwischen allen vor dem gesuchten Haupttermine fälligen Kapitalien und der ersten nach demselben fälligen Zahlung berechnet und mit Hilfe des gefundenen Wertes v den mittleren Verfalltag zwischen $(a + a_1 + \cdots + b)$ ℳ und b_1 ℳ bestimmt u. s. f.

IX) Zum Rechnen mit komplexen Zahlen (Seite 427—429). Multipliziert man zwei komplexe Ausdrücke:

$a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ und $a_1 + b_1 i = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ miteinander, so entsteht:

$$1) \quad (a+bi)(a_1+b_1 i) = rr_1[\cos(\alpha+\alpha_1) + i\sin(\alpha+\alpha_1)].$$

Da die Potenzierung ein Multiplizieren gleicher Faktoren ist (§§ 14, 28), so erhält man aus Gleichung 1), wenn $a + bi = a_1 + b_1 i$, $r = r_1$ und $\alpha = \alpha_1$ gesetzt wird:

$$(a + bi)^2 = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha),$$

und allgemein:

$$2) \quad (a + bi)^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Diese Gleichung ist die sogenannte Moivresche oder trigonometrische Binomial-Formel.*) Aus derselben ergiebt sich, daß die Module der Punkte $B_1, B_2, B_3, \cdots B_n$ der Gaußischen Zahlenebene gleich $r, r^2, r^3, \cdots r^n$, und die Amplituden dieser Punkte gleich $\alpha, 2\alpha, 3\alpha \cdots n\alpha$ sind. Die Moivresche Formel liefert also den allgemeinen Beweis für die Seite 428. auf induktivem Wege abgeleitete Wahrheit: Die Potenzierung einer durch Punkt B_1 dargestellten Zahl ist gleichbedeutend mit Multiplikation des Winkels, welchen der radius vector OB_1 mit der positiven reellen Halbachse OA (Fig. 54) bildet. Da nun die logarithmische Spirale als eine Kurve definiert wird, deren radien vectoren nach einer geometrischen Progression zu- oder abnehmen, wenn die zugehörigen Argumente eine steigende oder fallende arithmetische Progression bilden, so ist klar, daß diese Linie als geometrische Versinnlichung des Moivreschen Satzes, bezw. der Potenzierung und Radizierung komplexer Zahlen dienen kann, wie Seite 429 oben gesagt worden ist. Die Benutzung der logarithmischen Spirale zur Veranschaulichung dieser Rechenoperationen war schon Gauß bekannt.

X) **Ist eine fernere Erweiterung des Zahlenbegriffs möglich?** (Zu Seite 432.) Nachdem die ursprünglich ausreichende Zahlenlinie (Seite 392—393) sich als notwendige Folge unseres Denkens zu der unbegrenzten Gaußischen Zahlenebene (Seite 422) ausgedehnt hat,

---

*) Nach Günther finden sich in Moivres (1667—1754) Schrift „Miscellanea analytica de seriebus quadraturis, Londini 1730, folgende beiden Gleichungen:

$$\frac{(\cos x + i \sin x)^y + (\cos x - i \sin x)^y}{2} = \cos xy,$$

$$\frac{(\cos x + i \sin x)^y - (\cos x - i \sin x)^y}{2i} = \sin xy.$$

Weiter hat Moivre diese Gleichungen nicht umgeformt. Euler addierte und subtrahierte dieselben und fand:

$$(\cos x + i \sin x)^y = \cos xy + i \sin xy,$$

$$(\cos x - i \sin x)^y = \cos xy - i \sin xy.$$

muß sich jedem denkenden Arithmetiker die Frage aufdrängen, ob nicht das Bedürfnis eintreten könne, das Zahlengebiet in der dritten Dimension, in den Raum zu erweitern. Schon Gauß hatte die Überzeugung, daß es in der allgemeinen Arithmetik keinen allgemeinern Ausdruck als $a + bi$ giebt, welcher sämtlichen Rechengesetzen der Gaußischen Zahlenebene unterworfen werden kann. In den „Göttinger gelehrten Anzeigen" 1831, 64. Stück äußert sich Gauß folgendermaßen: „Der Verfasser (Gauß) hat sich vorbehalten, den Gegenstand künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relation zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von **mehr als zwei Dimensionen** darbieten, nicht noch andere, in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird." Wilhelm Matzka, Prof. in Prag, hat in seiner Schrift: „Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Größen der Algebra oder einer Grundlehre von der Ablenkung algebraischer Größenbeziehungen" (Prag 1850) bewiesen, daß die für komplexe Zahlen gültigen Gesetze der Addition auf Zahlen im Raume angewendet, zu Ungereimtheiten führen. Besonders würde das Fundamentalgesetz der Addition: „Gleiches zu Gleichem addiert, giebt Gleiches", für diese Zahlart nicht bestehen. Bei den von dem englischen Mathematiker Hamilton geschaffenen „Quaternionen" ist das Kommutationsgesetz der Multiplikation aufgehoben, es ist nicht mehr $ab = ba$. Prof. Dr. Stolz in Innsbruck spricht sich in seinen „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" über die vorliegende Frage sehr klar aus: „Die komplexen Zahlen, welche unter sich als besondere Fälle die reellen und die imaginären Zahlen enthalten, sind die **einzige** Zahlenart, welche in der allgemeinen Arithmetik berücksichtigt zu werden braucht. Es läßt sich nämlich zeigen, daß es außer ihnen kein System von Zahlen giebt, mit denen genau in derselben Weise gerechnet werden kann, wie mit den reellen. An eine fernere Erweiterung des Zahlenbegriffs ist nicht zu denken."

XI) **Geschichtliches zum ersten Abschnitt.** In früherer Zeit bezeichnete man in Frankreich und Italien die Addition und Subtraktion durch die Anfangsbuchstaben der Wörter plus (piu) und minus (meno). Man vermutet, daß die Rechenzeichen + und — aus den Buchstaben p und m hervorgegangen sind. Die Rechenzeichen erster Stufe erscheinen zuerst in den Schriften der deutschen Mathematiker Christoph Rudolph aus Jauer („Coß", 1524) und Michael Stifel aus Eßlingen („Die Coß Chr. Rudolphs", 1571). Das Zeichen $\times$ ist von Oughtred (1631), der Punkt von Leibniz (1646—1716) in die Arithmetik eingeführt worden. Der Divisions- oder Bruchstrich gelangte wahrscheinlich mit Einführung

der indischen Rechenmethode (Algorithmus) zur Anwendung; er findet sich bei Leonardo von Pisa (1202). Leibniz wendete 1690 zuerst den Doppelpunkt als Zeichen der Division an. Das Wurzelzeichen ist aus dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes „radix" (Wurzel) entstanden. Rudolph bezeichnete zuerst die Quadratwurzel auf die heute übliche Art, für die dritte und vierte Wurzel benutzte er besondere Zeichen. (Klügel, „Math. Wörterbuch", 1. Band, Seite 40.) Die jetzt üblichen Rechenzeichen wurden (wie die indisch-arabischen Ziffern) durch die Buchdruckerkunst fixiert und gelangten dadurch allgemein zur Einführung. Der französische Mathematiker Vieta (1540—1603) zog zum Zeichen der Zusammengehörigkeit von Zahlen einen wagerechten Strich über dieselben, wie es noch heute bei der Radizierung zusammengesetzter Ausdrücke gebräuchlich ist. Die Klammern kommen zuerst bei dem niederländischen Mathematiker Girard (1629) vor, ihre Anwendung ist seit dem 18. Jahrhundert allgemein. Das Gleichheitszeichen hat der Engländer Robert Recorde in seiner „Arithmetik" (1552) mit dem Bemerken eingeführt, „daß keine zwei Dinge gleicher sein könnten, als ein Paar gleich große parallele Geraden". (Klügel, 1. Band, Seite 42.) Sein Landsmann Thomas Harriot wendete zuerst das Ungleichheitszeichen an. Die Keime der Potenzbezeichnung finden sich bei Stifel, der niederländische Mathematiker Simon Stevin schuf (1585) die Benennung der Potenzen nach ihren Exponenten. Früher waren nämlich für die höheren Potenzen zusammengesetzte Namen wie „Quadrato-Quadrat", „Kubo-Kubus" im Gebrauch. Unsere heutige Potenzbezeichnung gelangte im Laufe des 17. Jahrhunderts besonders durch Herigogne (1634) und Descartes zur Verbreitung.

Alphabetisches Sachverzeichnis.

Alphabetisches Namenverzeichnis.